

אלגברה לינארית 2 (88113) בחינת סיום (מועד ג')

מרצה: פרופ' רון עדין
מתרגלת: אמונה ליפסקר
משך הבחינה: שלוש שעות.
חומר עזר מותר: מחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות, כל שאלה בעמוד נפרד. כל השאלות שוות משקל.
נא לרשום בעמוד הראשון אילו שאלות נבחרו. בהעדר רישום, תיבדקנה ארבע
השאלות הראשונות במחברת.
ניתן לסמן עמודים שלמים כ"טיוטה". נא הסבירו ונמקו בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה !

.1

- א. מצאו מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת:
 $\det(A) = \det(I + A) = \det(I - A) = 0$
ב. הוכיחו: לא קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ המקיימת:
 $\det(A) = \det(I + A) = \det(I - A) = 0$
ג. נתון: המטריצה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מקיימת $\det(A) = \det(I + A) = 0$. חשבו את
 $\det(10I + A)$.

2. תהי $B \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ מטריצה עם פולינום מינימלי $m_B(x) = x^4 + x^2$.
א. רשמו את כל צורות ז'ורדן האפשריות עבור B .
ב. כיצד תשתנה התשובה לסעיף א' אם נתון, בנוסף: $\text{tr}(B) = 0$?
ג. האם ייתכן שהמטריצה B צמודה לעצמה? האם ייתכן שהיא בעלת איברים
ממשיים בלבד? נמקו.

3. תהי $M = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$ פרמטרים.

- א. מצאו את הפולינום המינימלי של M ; חלקו למקרים לפי הצורך.
ב. מצאו את כל ערכי הפרמטרים a, b, c שעבורם M לכסינה.
ג. מצאו את כל ערכי הפרמטרים a, b, c שעבורם M לכסינה אורתוגונלית.

4. יהי $V = \mathbb{R}^3$, עם המכפלה הפנימית הרגילה, ויהי
 $W = \text{span}\{(1,2,2), (0,1,0)\} \subseteq V$
א. מצאו בסיס אורתונורמלי עבור W . בדקו את תשובתכם.
ב. מצאו בסיס אורתונורמלי עבור תת-המרחב הניצב W^\perp .
ג. מצאו וקטור הנמצא במרחק 1 מכל אחד מהאיברים (וקטורים) בבסיסים
האורתונורמליים מסעיפים א', ב' לעיל.

.5

- א. תהי $Z = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. מצאו מטריצה אוניטרית $U \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ומטריצה אלכסונית $D \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ המקיימות $U^{-1}ZU = D$.
- ב. האם Z נורמלית? אוניטרית? צמודה לעצמה?
- ג. חשבו את ארבעת אברי המטריצה Z^{100} . מהו סכום האברים?