תרגיל 9 אינפי 4

1. השתמשו במשפט הדיברגנץ כדי לחשב את נפח התחום החסום בין $x^2+y^2+z^2=1$ לבין $z=\frac{1}{2}$.

פתרון. מבקשים להשתמש במשפט הדיברגנץ. אז צריך לבצע אינטגרל משטחי. נשמע סביר לקחת בתור שדה וקטורי את הפונקציה

$$F=(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3})$$

אנחנו רוצים לחשב את הנפח של החלק של הכדור שנמצא מעל $z=\frac{1}{2}$ כלומר: $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq 1 \quad z\geq\frac{1}{2}\}$. אז המשטח שנרצה לחשב עליו אינטגרל משטחי מורכב בעצם משני משטחים

$$M=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1 \quad z\geq\frac{1}{2}\}$$

$$M'=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq 1 \quad z=\frac{1}{2}\}$$

נתחיל עם המשטח M: אפשר לעשות לו פרמטריזציה

$$\varphi(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-z^2})$$

כאשר צריך שיתקיים

$$\frac{1}{2}\leq z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

כלומר

$$x^2+y^2\leq\frac{3}{4}$$

אז זה התחום של הפרמטריזציה. עכשיו נחשב את האינטגרל המשטחי

$$\int\limits_M (F\cdot n)\mathrm{d}S$$

נשים לב ש

$$\varphi_x=(1,0,\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}})$$

$$\varphi_y=(0,1,\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}})$$

המכפלה הוקטורית יוצאת

$$\varphi_x \times \varphi_y = (\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1)$$

נשים לב ש $z > 0$ ולכן זה באמת נורמל שפפונה החוצה. עכשיו לפי נוסחא

$$\begin{aligned}
\int\limits_M (F \cdot n)\mathrm{d}S &= \int\limits_{x^2+y^2 \le \frac{3}{4}} F(\varphi(x,y)) \cdot (\varphi_x \times \varphi_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{x^2+y^2 \le \frac{3}{4}} (\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{\sqrt{1-x^2-z^2}}{3}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{3} \int\limits_{x^2+y^2 \le \frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

עכשיו צריך כמובן לבצע החלפת משתנים פולרית

$$\begin{aligned}
x &= r\cos t \\
y &= r\sin t
\end{aligned}$$

ונזכור שהיעקוביאן הוא r ולכן יוצא לנו

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{3}{4}}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r\mathrm{d}t\mathrm{d}r &= \frac{2\pi}{3} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{3}{4}}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi}{3} \left. (-\sqrt{1-r^2}) \right|_0^{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

זה מה שיוצא מהאינטגרל המשטחי הראשון. עכשיו נחשב את האינטגרל המשטחי השני. ברור שפרמטריזציה בשבילו תהיה

$$\varphi(x,y) = (x, y, \frac{1}{2})$$

כאשר $x^2 + y^2 \le \frac{3}{4}$. כאן נעדיף לחשב ע"י מציאת נורמל (חיצוני!) שבמקרה שלנו ברור שהוא

$$n = (0, 0 - 1)$$

ולכן

$$F \cdot n = -\frac{z}{3}$$

ולכן אנחנו רוצים לחשב

$$\int\limits_{M'} \frac{-z}{3}\mathrm{d}S$$

במקרה שלנו זה פשוט

$$\int\limits_{x^2+y^2\leq\frac{3}{4}} -\frac{1}{6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

שטח מעגל ברדיוס $\sqrt{\frac{3}{4}}$ הוא $\frac{3\pi}{4}$ ולכן האינטגרל הזה שווה ל

$$-\frac{1}{6}\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{8}$$

לסיכום, לפי משפט הדיברגנץ אנחנו יודעים ש

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int\limits_M F\cdot n\mathrm{d}S+\int\limits_{M'} F\cdot n\mathrm{d}S=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{8}=\frac{5\pi}{24}$$

וזה הנפח המבוקש.

2. השתמשו במשפט הדיברגנץ כדי לחשב את נפח התחום המקיים $x^2+y^2\leq(2-z)^2$ בין המישורים $z=0$ ו $z=1$.

פתרון. נסמן את הגוף שרוצים לסמן את הנפח שלו ב V. נסמן את שלושת המשטחים הבאים:

$$M_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leq 1\quad z=1\}$$
$$M_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leq 2\quad z=0\}$$
$$M_3=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=(2-z)^2\quad 0\leq z\leq 1\}$$

לפי משפט הדיברגנץ. אם נבחר F כך ש $\operatorname{div}F=1$ אז מתקיים

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int\limits_{M_1}(F\cdot n_1)\mathrm{d}S+\int\limits_{M_2}(F\cdot n_2)\mathrm{d}S+\int\limits_{M_3}(F\cdot n_3)\mathrm{d}S$$

ברור ש $n_1=(0,0,1)$ ו $n_2=(0,0,-1)$, לכן ננסה לבחור

$$F=(\frac{x}{2},\frac{y}{2},0)$$

מה שיבטיח לנו

$$\int\limits_{M_1}(F\cdot n_1)\mathrm{d}S=\int\limits_{M_2}(F\cdot n_2)\mathrm{d}S=0$$

ויישאר לנו לחשב רק את האינטגרל המסובך יותר. פרמטריזציה לM_3 אפשר לבצע על ידי

$$\varphi(x,y)=(x,y,2-\sqrt{x^2+y^2})$$

כאשר תחום ההגדרה הוא

$$1\leq x^2+y^2\leq 4$$

נחשב כרגיל את המכפלה הוקטורית

$$\varphi_x = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$$
$$\varphi_y = (1, 0, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

ולכן

$$\varphi_x \times \varphi_y = (\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$$

נשים לב שהנורמיל הזה בכיוון הנכון כי $z > 0$. כעת,

$$F(\varphi(x,y)) \cdot \varphi_x \times \varphi_y = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

ולכן לפי נוסחא

$$\int\limits_{M_3} (F \cdot n_3) \mathrm{d}S = \int\limits_{1 \le x^2+y^2 \le 4} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

שוב נבצע את ההצבה הפולרית המתבקשת

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

ונזכור שהיעקוביאן הוא r ולכן האינטגרל שווה ל

$$\int\limits_1^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}r = \pi \int\limits_1^2 r^2 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{3} r^3 \Big|_1^2 = \frac{7\pi}{3}$$

וזה הנפח.

3. נאמר כי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ הוא תחום Brouwer אם לכל פונקציה $f : G \to G$ רציפה יש נקודת שבת.

(א) הראו כי $\mathbb{R}$ אינו תחום ברואר.

פתרון. אפשר פשוט לקחת $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהיא $f(x) = x + 1$.

(ב) הראו כי $\{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ אינו תחום ברואר

פתרון. אסשר לקחת את הפונקציה שמבצעת סיבוב ב 180 מעלות, כלומר

$$f(x,y) = (-x, -y)$$

ברור ש

$$f(x,y) = (x,y)$$

אם ורק אם $x = y = 0$ שזה מחוץ לתחום שלנו.