פתרון לתרגיל 9 באינפי 2

שאלה 1

סעיף 1

$f_n(x) = \cos^{2n}(x)$ בקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

בקטע המדובר $0 \le \cos^2 x \le 1$ למעשה $0 \le \cos^2 x < 1$ חוץ מאשר בנקודה $x = 0$.
ולכן אם נשאיף את n לאינסוף נגלה בקלות שפונקציית הגבול היא

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

קיבלנו סדרת פונקציות רציפות שמתכנסת לפונקציה לא רציפה ולכן זאת התכנסות נקודתית ולא התכנסות במ"ש.

סעיף 2

$f_n(x) = \frac{\arctan x}{n}$ ב $\mathbb{R}$

קל לראות שאם נשאיף את n לאינסוף נקבל 0 ולכן פונקציית הגבול היא 0. כדי לבדוק במ"ש נשתמש ב $\lim - \sup$ ונקבל

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\{\frac{\arctan x}{n}\} = \frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$$

ולכן ההתכנסות במ"ש ב $\mathbb{R}$.

סעיף 3

$f_n(x) = x^n - x^{2n}$ בקטע $(-1, 1)$

קל לראות שעבור כל x בקטע, הפונקציה מתכנסת ל 0 כאשר n שואף לאינסוף ולכן פונקציית הגבול היא 0.

נשתמש ב $\lim - \sup$ כדי לבדוק התכנסות במ"ש. אם n אי זוגי ו x קרוב ל -1 אז $x^n - x^{2n}$ קרוב ל -2. לכן עבור n אי זוגי

$$\sup_{x\in(-1,1)} \{|x^n - x^{2n}|\} \ge 2$$

לכן אין סיכוי שהסדרה הזאת מתכנסת ל 0 (כל האיברים האי זוגיים שלה גדולים מ 2) ואין התכנסות במ"ש.

סעיף 4

$f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ בקטע $(0, \infty)$

קל לראות שאם משאיפים את n לאינסוף הפונקציה שואפת ל 0 ולכן פונקציית הגבול היא 0. כעת נשתמש ב $\lim - \sup$

$$\sup_{x\in(0,\infty)} \{\frac{1}{nx+1}\} = 1$$

ולכן אין התכנסות במ"ש.

שאלה 2

סעיף 1

אם $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע I ו $g_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $g(x)$ בקטע I אז $f_n(x)+g_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)+g(x)$ בקטע I

נכון. יהי $\epsilon>0$ ידוע כי קיים N_1 כך שלכל $n>N_1$ ו $x\in I$ מתקיים

$$|f_n(x)-f(x)|\le\frac{\epsilon}{2}$$

וקיים N_2 כך שלכל $n>N_2$ ולכל $x\in I$ מתקיים

$$|g_n(x)-g(x)|\le\frac{\epsilon}{2}$$

ולכן אם ניקח $N=\max\{N_1,N_2\}$ יתקיים שלכל $n>N$ ולכל $x\in I$

$$|f_n(x)+g_n(x)-f(x)-g(x)|\le|f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|\le\epsilon$$

סעיף ב

אם $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע I אז $g(x)f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $g(x)f(x)$ בקטע I

לא נכון. נבחר $f_n(x)=\frac{1}{n}$ בקטע $(0,1)$ שזאת סדרה שמתכנסת במ"ש ל 0 ונבחר $g(x)=\frac{1}{x}$ אז $f_n(x)g(x)=\frac{1}{nx}$ לא מתכנס במ"ש ל 0 בקטע $(0,1)$ (קל לראות לפי $\lim-\sup$)

סעיף ג

אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $S(x)$ בקטע I אז הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ל 0 בקטע I.

נכון.

נגדיר $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f_k(x)$ לפי הנתון $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $S(x)$ ולכן גם $S_{n-1}(x)$ מתכנסת במ"ש ל $S(x)$. לכן $f_n(x)=S_n(x)-S_{n-1}(x)$ מתכנסת במ"ש (לפי סעיף א') ל $S(x)-S(x)=0$ כנדרש.

סעיף ד

יהי $\epsilon>0$. צריך למצוא $\delta>0$ כך ש

$$|x-y|\le\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon$$

ידוע כי קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ ו $x\in I$ מתקיים ש

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\epsilon}{3}$$

לפי הרציפות במ"ש של f_n, ידוע כי יש $\delta > 0$ עבורו מתקיים

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

עבור δזה באמת יתקיים שאם $|x-y| \leq \delta$ אז

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) + f(y)| < \epsilon$$

כנדרש.

שאלה 3

נניח בשלילה כי f_n מתכנסת במ"ש ב (a,b) ונוכיח שהיא מתנסת במ"ש ב $[a,b]$ בסתירה לנתון. לפי ההנחה שלנו

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

אבל נשים לב ש

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max\{\sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(a) - f(a)|, f_n(b) - f(b)|\}$$

נשים לב שכאשר $n \to \infty$ מתקיים ש

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(a) - f(a)| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(b) - f(b)| = 0$$

(הראשון מהתכנסות במ"ש ב (a,b), והשני והשלישי מהתכנסות נקודתית ב $[a,b]$) ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \max\{\sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(a) - f(a)|, f_n(b) - f(b)|\} = 0$$

כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש ב $[a,b]$ בסתירה לנתון.