תרגיל 5- פתרון

1. חשבו את האינטגרלים המסוימים הבאים:

א. $\int\limits_0^{0.5} arccos\ x\ dx$

ב. $\int\limits_0^{\pi} |sin\ x\ -\ cos\ x|\ dx$

ג. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{cos\ x + 2sin\ x + 3}$

פתרון-

א. בעזרת אינטגרציה בחלקים, נסמן: $u\ =\ arccos\ x,\ v'\ =\ 1 \Leftarrow u'\ =-\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ v\ =\ x$. ולכן,

$$\int\limits_0^{0.5} arccos\ x\ dx = xarccos\ x\ ]_0^{0.5} + \int\limits_0^{0.5} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\ = \frac{\pi}{6} + \sqrt{1-x^2}\ \ ]_0^{0.5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

ב.

נבדוק את החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x) = \sin x - \cos x$.

נבדוק מתי הפונקציה מתאפסת.

$$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$ ובתחום $[0, \pi]$

נקבל $x = \frac{\pi}{4}$. מכיוון שהפונקציה $f(x) = \sin x - \cos x$ רציפה, $x = \frac{\pi}{4}$ נקודת חיתוך יחידה עם ציר x, $f(0) < 0$ ו $f(\pi) > 0$ נקבל שהפונקציה חיובית בקטע $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ ושלילית בקטע $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\int\limits_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0 + \cos 0) + (-\cos\pi - \sin\pi) - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1 + 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

ג. תחילה נפתור את האינטגרל הלא מסוים. נשתמש בהצבה אוניברסלית לקבל:

$$t = \tan\frac{x}{2}\ ;\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ;\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1 - t^2 + 4t + 3 + 3t^2}dt =$$

$$= \int \frac{2}{2t^2 + 4t + 4}dt = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 1} = \arctan(t+1) + C =$$

$$= \boldsymbol{\arctan(\tan\frac{x}{2} + 1) + C}$$

כעת נציב את גבולות האינטגרל לקבל: $arctan(tan\frac{\pi}{4}+1)-arctan(tan\ 0\ +1)\ =\ arctan\ 2\ -\ arctan\ 1$

2. תהי $f(x)$ בעלת נגזרת רציפה ב- $[0,2\pi]$. הוכיחו כי: $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi} f(x)cos(nx)\,dx=0$ (רמז: היזכרו במשפט מאינפי 1 על פונקציות רציפות).

פתרון-

נבצע אינטגרציה בחלקים:

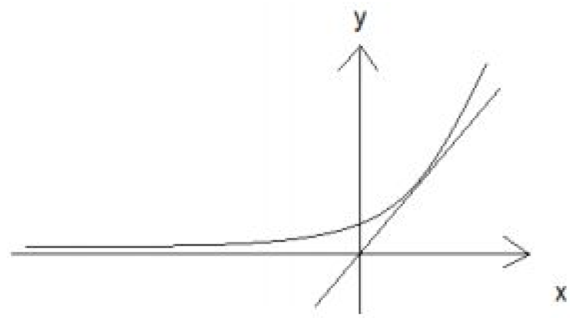
$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)cos(nx)\,dx=\frac{f(x)sin(nx)}{n}\Big]_0^{2\pi}-\int\limits_0^{2\pi} f'(x)\frac{sin(nx)}{n}dx=-\int\limits_0^{2\pi} f'(x)\frac{sin(nx)}{n}dx$$

מכיוון ש $f'(x)$ רציפה בקטע סגור $[0,2\pi]$ היא גם חסומה בו. נניח ע"י $|f'(x)|\le M$. בנוסף, $|sin(nx)|\le 1$ **ולכן לפי** משפט ערך ממוצע של פונקציה:

$$|\int\limits_0^{2\pi} f'(x)\frac{sin(nx)}{n}dx|\le|f'(c)\frac{sin(nc)}{n}(2\pi-0)|\le\frac{2\pi M}{n}\to 0$$

3. ישר $y=ax$ משיק לפונקציה $y=e^x$. מצאו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- y.

פתרון-



נמצא תחילה את משוואת המשיק. בנקודת ההשקה נקבל ש $e^x=ax$ וששיפוע המשיק הוא a ז"א $e^x=a$. משתי המשוואות הנ"ל נקבל ש $ax=a \Leftarrow x=1 \Leftarrow a=e$.

השטח המבוקש הוא $\int\limits_0^1\left(e^x-ex\right)dx=\left[e^x-\frac{ex^2}{2}\right]_0^1=\left(e-\frac{e}{2}\right)-(1-0)=\frac{e}{2}-1$.

4. חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציות: $f(x) = x^4 + 2x^2,\ g(x) = 28 - x^2$

פתרון-

נמצא תחילה את נקודות החיתוך של הגרפים.

$$x^4 + 2x^2 = 28 - x^2$$

$$x^4 + 3x^2 - 28 = 0$$

$$\left(x^2 + 7\right)\left(x^2 - 4\right) = 0$$

הפונקציות נחתכות כאשר $x_1 = 2, x_2 = -2$.

נשים לב ש $g(0) > f(0)$. מכיוון שהפונקציות רציפות נקבל שלכל $-2 < x < 2$ מתקיים $g(x) > f(x)$.

$$\int_{-2}^{2}\left(g(x) - f(x)\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(\left(28 - x^2\right) - \left(x^4 + 2x^2\right)\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(-x^4 - 3x^2 + 28\right)dx = \left[\frac{-x^5}{5} - x^3 + 28x\right]_{-2}^{2} =$$

$$\left(\frac{-2^5}{5} - 2^3 + 28\cdot 2\right) - \left(\frac{-(-2)^5}{5} - (-2)^3 + 28\cdot(-2)\right) = 83.2$$

5. חשבו את אורך העקומה: $y = \sqrt{4 - x^2dx}$ מ- $x = \sqrt{3}$ ל- $x = -1$.

פתרון-

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ולכן $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, ואורך הקשת הוא:

$$\ell = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}dx =$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4}{4 - x^2}}dx = 2\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2}}dx =$$

נציב $t = \frac{x}{2} \Leftarrow dt = \frac{1}{2}dx$:

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2}{\sqrt{1 - t^2}}dt = [2\arcsin t]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-\frac{1}{2})) = 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \boldsymbol{\pi}$$

6. הוכיחו כי אורך העקום של גרף הפונקציה $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ מ- $x = a$ ל- $x = b$, שווה לשטח הכלוא בין העקום, ציר ה-x והישרים $x = a,\ x = b$.

פתרון-

נסמן את אורך העקום ב־ℓ ואת השטח ב־S. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftarrow f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, ואכן מתקיים:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}dx = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}dx =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}}dx = \int_a^b \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}}dx = \int_a^b \frac{e^x + e^{-x}}{2}dx = \int_a^b f(x)dx = S$$