אינפי 4 - תרגול 4

10 באוגוסט 2011

תרגיל

$$\int_C xyds$$

כאשר C הוא קטע ישר המחבר את שתי הנקודות $(-1,\,1)$ ו-$(2,\,3)$.

פתרון

נמצא את משוואת הישר:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{-1-2} &= \frac{y-3}{1-3}\\ y &= \frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\end{aligned}$$

עבור C הנתון: $-1\le x\le 2$.

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1}^{2} x\cdot\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\right)\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}dx\\ &= \frac{\sqrt{13}}{3}\int_{-1}^{2}\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x\right)dx=\frac{3\sqrt{13}}{2}\end{aligned}$$

תרגיל

$$I=\int_L \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$$

כאשר

$$L:\begin{cases}x &= a\cos t\\ y &= a\sin t\\ z &= bt\end{cases}$$

$$t\in[0,\,2\pi]$$

פתרון

$$ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

אזי

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}t^2} \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \arctan\left(\frac{bt}{a}\right)|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \arctan\left(\frac{2\pi b}{a}\right) \end{aligned}$$

אינטגרל קווי מסוג 2

$$\begin{aligned} \int_C \bar{F}\cdot\overline{dr} &= \int_C Pdx + Qdy + Rdz \\ \int_C \bar{F}\cdot\overline{dr} &= \int_a^b \bar{F}\left(\bar{r}\left(t\right)\right)\cdot\bar{r}^{'}\left(t\right)dt \\ \int_C Pdx+Qdy+Rdz &= \int_a^b \Big(P\cdot x^{'}\left(t\right) + Q\cdot y^{'}\left(t\right) + R\cdot z^{'}\left(t\right)\Big)dt \end{aligned}$$

אפיונים ושימושים

1. הכיוון של C חשוב.
2. משמעות - עבודה של כח F.
3. $\int_{AB}\bar{F}\cdot\overline{dr} = -\int_{BA}\bar{F}\cdot\overline{dr}$

תהליך הפתרון

1. פרמטריזציה.
2. גזירה $\bar{r}^{'} = \left(x_t^{'}, y_t^{'}, z_t^{'}\right)$.
3. בדיקת כיוון המסלול.
4. חישוב האינטגרל.

מקרים מיוחדים

1. עקום מישורי בצורה פרמטרית:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b \left(P\left(x\left(t\right),\, y\left(t\right)\right) \cdot x^{'}\left(t\right) + Q\left(x\left(t\right),\, y\left(t\right)\right) \cdot y^{'}\left(t\right)\right) dt$$

2. עקום מישורי נתון בצורה מפורשת:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b \left(P\left(x,\, y\right) + Q\left(x,\, y\right) \cdot y_x^{'}\right) dx$$

תרגיל

$$\begin{aligned} I &= \int_C ydx + \left(y + x^2\right) dy \\ C &: \quad y = 2x - x^2,\, y \geq 0 \end{aligned}$$

זה המקרה המיוחד השני:

$$\begin{aligned} y_x^{'} &= 2 - 2x \\ 0 \leq \quad x &\leq 2 \end{aligned}$$

(זה התחום כיוון ש-$y \geq 0$).

$$I = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) + \left(2x - x^2 + x^2\right)\left(2 - 2x\right) dx = 4$$

תרגיל

$$I = \oint_C \left(x^2 - y\right) dx$$

כאשר C מלבן בכיוון החיובי המורכב מהישרים הבאים:

$$\begin{matrix} x = 0 & y = 0 \\ x = 1 & y = 2 \end{matrix}$$

נסמן:

$$\begin{aligned} 0 &= (0,\, 0) \\ A &= (1,\, 0) \\ B &= (1,\, 2) \\ C &= (0,\, 2) \end{aligned}$$

אזי:

$$\int_C = \int_{0A} + \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD}$$

אזי:

$$\begin{aligned}
0A:\ y &= 0 \\
\int_{0A} &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\
AB:\ x &= 1 \Rightarrow dx = 0 \\
\int_{AB} &= \int 0 = 0 \\
BC:\ y &= 2 \\
\int_{BC} &= \int_1^0 \left(x^2 - 2\right) dx = 2 - \frac{1}{3} \\
C0:\ x &= 0 \Rightarrow dx = 0 \\
\int_{C0} &= 0
\end{aligned}$$

לכן סה"כ:

$$I = \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{3} = 2$$