לינארית 2 תרגול 10

3 ביוני 2021

תרגילים:

1. בהגדרה של מכפלה פנימית, מבחינת כמעט לינאריות ברכיב הימני, מתקיים:

   (א) $\langle v,u\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}$

   (ב) $\langle v,\alpha u\rangle=\overline{\alpha}\langle v,u\rangle$

   (ג) מה שכן דומה לרכבי השמאלי: $\langle v,u+w\rangle=\langle v,u\rangle+\langle v,w\rangle$.

2. בתרגול קודם, כשהוכחנו שלכל $W\leq V$ מתקיים $W^{\perp^{\perp}}=W$ סטודנטים רצו להשתמש ביחידות הפירוק. אין כזה דבר, להמחשה: הוכיחו או הפריכו: אם

$$W\oplus U=V=W\oplus W^{\perp}$$

אז $U=W^{\perp}$.

פתרון: הפרכה: ניקח $V=\mathbb{R}^2,W=span\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},U=span\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\neq W^{\perp}=span\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

3. הוכיחו: $(W+U)^{\perp}=W^{\perp}\cap U^{\perp}$.

פתרון: $\subseteq$: יהי $v\in(W+U)^{\perp}$, לכן לכל $w+u\in W+U$ נקבל: $\langle v,w+u\rangle=0$.
בפרט, לכל $w\in W$ נקבל שעבור $u=0$ מתקיים:

$$0=\langle v,w+u\rangle=\langle v,w\rangle$$

ולכן $v\in W^{\perp}$. באותו אופן, לכל $u\in U$ נקבל שעבור $w=0$ מתקיים:

$$0=\langle v,w+u\rangle=\langle v,u\rangle$$

ולכן $v\in U^{\perp}$. ובסה"כ: $v\in W^{\perp}\cap U^{\perp}$.
$\supseteq$: נניח $v\in W^{\perp}\cap U^{\perp}$, לכן:

$$\forall w\in W,u\in U:\langle v,w\rangle=\langle v,u\rangle=0$$

יהי $w+u \in W+U$, נקבל:

$$\langle v, w+u\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle = 0+0=0$$

ולכן $v \in (W+U)^{\perp}$.

4. יהי W ת"מ של V, ויהי $B=\{w_1,\dots,w_k\}$ בסיס או"ג של W. אזי:

$$\forall v \in V : v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$$

ומתקיים:

$$\pi_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

5. יהיו $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$. הוכיחו:

$$(a_1+\dots+a_n)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) = n\left(a_1^2+\dots+a_n^2\right)$$

פתרון: ניקח את הוקטורים $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. כעת נשים לב:

$$\langle v, u\rangle^2 = (a_1+\dots+a_n)^2$$

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$\|u\|^2 = n$$

ולכן, לפי א"ש קושי שוורץ, האומר:

$$|\langle v, u\rangle| \le \|v\| \cdot \|u\|$$

נקבל (אחרי העלאתו בריבוע):

$$(a_1+\dots+a_n)^2 = \langle v, u\rangle^2 \le \|v\|^2 \cdot \|u\|^2 = n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$

6. יהי V ממ"פ, ויהי $0 \neq v \in V$. נסמן $S = \{u \in V : \|u\| = 1\}$. הוכיחו ש־ $\min\{\|v-u\| : u \in S\}$ מתקבל עבור הנרמול של v הלא הוא: $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$.
פתרון: נפתח את הנורמה של $v - \hat{v}$, וכן של $v - u$, ונראה מה צ"ל:

$$\|v-\hat{v}\|^2 = \left\|v - \frac{v}{\|v\|}\right\|^2 = \left\|v\left(1-\frac{1}{\|v\|}\right)\right\|^2 = \left|1-\frac{1}{\|v\|}\right|^2 \cdot \|v\|^2 =$$

$$= \|v\|^2\left(1-\frac{2}{\|v\|}+\frac{1}{\|v\|^2}\right) = \|v\|^2 - 2\|v\| + 1$$

ומצד שני:

$$\|v-u\|^2 = \langle v-u, v-u\rangle = \langle v,v\rangle - \langle v,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle u,u\rangle =$$

$$= \|v\|^2 - \underbrace{\left(\langle v,u\rangle + \overline{\langle v,u\rangle}\right)}_{=2Re\langle v,u\rangle} + 1 = \|v\|^2 - 2Re\langle v,u\rangle + 1$$

לכן בסה"כ צריך להוכיח:

$$Re\langle v,u\rangle \leq \|v\|$$

נשים לב:

$$Re\langle v,u\rangle \leq |Re\langle v,u\rangle| = \sqrt{(Re\langle v,u\rangle)^2} \leq \sqrt{(Re\langle v,u\rangle)^2 + (Im\langle v,u\rangle)^2} = |\langle v,u\rangle|$$

כעת לפי קושי שוורץ נוכל להמשיך:

$$\leq \|v\| \cdot \|u\| = \|v\|$$

מש"ל.

7. תרגיל חזרה על לכסון וזרדון: יהי $J_n(0)$ בלוק ז'ורדן $n \times n$ של ע"ע 0, עבור $n > 1$.
הוכיחו: לא קיימת מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש־ $A^2 = J_n(0)$.
פתרון: ניזכר איך נראה הבלוק, עבור $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נב"ש שיש. ניזכר בפ"מ של בלוק ז'ורדן:

$$m_{A^2}(x) = m_{J_n(0)}(x) = x^n$$

זאת אומרת ש־ $\left(A^2\right)^n = A^{2n} = 0$, ולכל $k < n$ מתקיים $\left(A^2\right)^k = A^{2k} \neq 0$.
עכשיו נדון על A: מה הפ"א שלה? אם $\lambda \neq 0$ ע"ע של A, אז $\lambda^2 \neq 0$ ע"ע של $A^2 = J_n(0)$ בסתירה לכך שע"ע של בלוק ז'ורדן הם רק 0 (ובקצרה: ע"ע של נילפטנטית, הם רק 0), ולכן נקבל

$$P_A(x) = x^n$$

ולכן $A^n = 0$ עבור n זוגי זה בסתירה לכך ש־ $A^n = \left(A^2\right)^{\frac{n}{2}} \neq 0$. ועבור n איזוגי

$$A^{n+1} = \left(A^2\right)^{\frac{n+1}{2}} \neq 0$$

כי $\frac{n+1}{2} < n$.

8. יהי V מ"ו, ויהי $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ בסיס או"נ. יהיו $v_1 \ldots, v_n \in V$ המקיימים:

$$\forall i : \|e_i - v_i\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

הוכיחו: $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V.

פתרון: מספיק להוכיח שהם בת"ל. נב"ש שלא בת"ל, אז יש צ"ל לא טריוויאלי שלהם שנותן 0. כלומר, יש $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ כך ש־

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

נסמן $d_i = e_i - v_i$, ולכן $v_i = e_i - d_i$. ולכן:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i (e_i - d_i)$$

כלומר:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} a_i d_i$$

נשאיר את זה רגע בצד, ונשים לב:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i d_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i (e_i - v_i) \right\|^2 \leq$$

כעת, מאש"מ נקבל:

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot \|e_i - v_i\| \right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \right)^2 \leq$$

כעת מתרגיל לעיל, נקבל:

$$\leq \frac{1}{n} \cdot n \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$$

בסתירה לכך שהתחלנו וסיימנו באותו ביטוי, ובאמצע היה $<$.