טורי טיילור

הגדרה: תהי $f\left(x\right)$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים בקטע מסוים המכיל את הנקודה $x=a$, אזי

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ נקרא טור טיילור של $f\left(x\right)$ מסביב ל- $x=a$.

משפט: השוויון $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ מתקיים אם ורק אם $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$, כאשר

$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ ($R_n(x)$ נקרא השארית מסדר n של $f(x)$ סביב $x=a$).

משפט: תהי $f\left(x\right)$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בקטע מסוים המכיל את הנקודה $x=a$ ותהי $R_n(x)$ השארית מסדר n של $f(x)$ סביב $x=a$, אז עבור כל x בקטע זה קיימת לפחות נקודה אחת c בין a ל- x, כך שמתקיים

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (**צורת לגרנז' של השארית**), $c=a+t\left(x-a\right),\quad 0\le t\le 1$

הגדרה: טור טיילור מסביב ל- $x=0$ נקרא **טור מקלורן.**

כמה טורי טיילור (מקלורן) שימושיים:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k \quad -1<x<1$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \quad -\infty<x<\infty$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad -\infty<x<\infty$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad -\infty<x<\infty$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} \quad -1<x\le 1$$

$$(1+x)^m=1+\sum\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k \quad ,-1<x<1,\ m\ne 0,1,2,\ldots$$

התכנסות בקצוות הקטע תלויה ב- m