חבורת התמורות, מחזורים, סימן של תמורה, מבני מחזורים

הרצאה 9

נכתב על ידי נועם יערי

06.12.2016

סימון

$$\begin{aligned}\sigma = (1 \quad \sigma(1) \quad \sigma^2(1) \quad \cdots \quad \sigma^{k-1})\\ (a \quad \cdots \quad \cdots)\\ (b \quad \cdots \quad \cdots)\end{aligned}$$

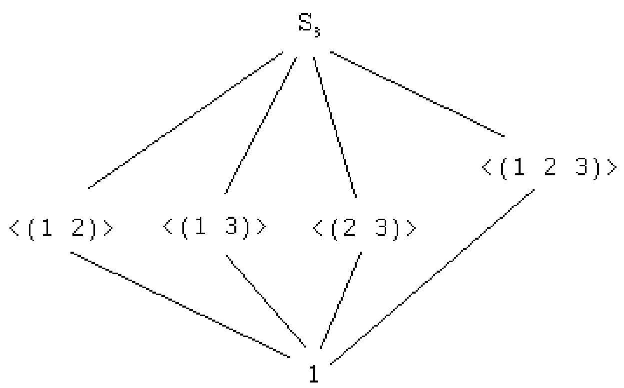
למשל, תמורה ב - S_8:

$$\overbrace{\underbrace{(1 \quad 3 \quad 8)}_{=(3 \quad 8 \quad 1)}(2 \quad 6)(4 \quad 7 \quad 9)(5)}^{\text{כל אחד נקרא מחזור}}$$

משפט

כל תמורה אפשר להציג באופן יחיד כמפלה של מחזורים זרים.

דוגמא



הערה

הסדר של מחזור באורך l הוא l.

דוגמא

כפל של תמורות:

$$\overleftarrow{(1 \quad 3 \quad 8) \quad (2 \quad 6) \quad (4 \quad 7 \quad 9) \quad (2 \quad 7 \quad 9 \quad 1)}$$
$$= (1 \quad 6 \quad 2 \quad 9 \quad 3 \quad 8) \quad (4 \quad 7) \quad (5)$$

הגדרה

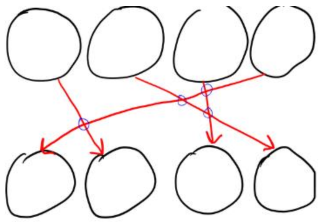
הסימן של תמורה :

נגדיר פונקציה :

$$sgn: S_n \to \{\pm 1\}$$

לפי נוסחה :

$$sgn(\sigma) = (-1)^{\left|\left\{(i,j)\Big|_{\sigma i > \sigma j}^{i<j} : \text{הפרעת סדר}\right\}\right|}$$



דוגמא

$$sgn\big((1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n)\big) = (-1)^{n-1}$$

לכן :

$$\begin{aligned} sgn\big((1 \quad 2)\big) &= -1 \\ sgn\big((1)\big) &= 1 \\ sgn\big((1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)\big) &= -1 \end{aligned}$$

משפט

sgn הוא הומומורפיזם.

הוכחה

תהיינה $\sigma, \tau \in S_n$

צריך להוכיח :

$$sgn(\sigma\tau) \cdot sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau) = 1$$

$$sgn(\sigma\tau) \cdot sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau) = \prod_{i<j} \begin{Bmatrix} +1 & \sigma i < \sigma j \\ -1 & \sigma i > \sigma j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} +1 & \tau i < \tau j \\ -1 & \tau i > \tau j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} +1 & \sigma\tau i < \sigma\tau j \\ -1 & \sigma\tau i > \sigma\tau j \end{Bmatrix}$$

נמיין את הזוגות $i < j$ לארבע משפחות:

$sgn(\sigma)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$sgn(\tau)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$sgn(\sigma\tau)$	$+$	$-$	$-$	$+$

מכיוון שהתרומה של כל זוג למכפלה היא $+1$, זו מכפלת הסימנים.

הגדרה

חבורת התמורות הזוגיות:

$$A_n = \ker(sgn)$$
$$|A_n| = \frac{1}{2}n!$$

הגדרה

G חבורה. $g, h \in G$ **צמודים זה לזה** אם יש $x \in G$ כך ש - $h = xgx^{-1}$

תרגיל

זה יחס שקילות. (בחבורה אבלית צמודים שקול לזהים).
מחלקות השקילות נקראת מחלקת צמידות.

הגדרה

"**מבנה המחזורים**" של σ היא קבוצת האורכים של המחזורים הזרים בפירוק של σ, כאשר מספר ההופעות משנה.

$$\begin{array}{ccc} (\cdots)\quad(\cdot\cdot) & : & 3+2 \\ (\cdot\cdot)\quad(\cdot\cdot)\quad(\cdot) & : & 2+2+1 \end{array}$$

תרגיל

מבני המחזורים ב - S_3:

$$p(3) = 3 \qquad \begin{array}{cc} 1+1+1 & (\cdot) \\ 2+1 & (\cdot\cdot) \\ 3 & (\cdots) \end{array}$$

מבני המחזורים ב - S_4:

$$p(4)=5 \qquad \begin{array}{cc} 4 & (\cdots\cdot) \\ 3+1 & (\cdots) \\ 2+2 & (\cdot\cdot)(\cdot\cdot) \\ 2+1+1 & (\cdot\cdot) \\ 1+1+1+1 & (\cdot) \end{array}$$

משפט

ב - S_n תמורות הן צמודות $\Leftrightarrow$ יש להן אותו מבנה מחזורים.

הוכחה

נוכיח שהצמדה אינה משנה את מבנה המחזורים. נתבונן במחזור:

$$\sigma \quad = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_l)$$

נסמן $b_i = x(a_i)$, כאשר x תמורה כלשהי.

$$x\sigma x^{-1} \stackrel{?}{=} (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_l)$$

הוכחנו שהצמדה של מחזור באורך l היא מחזור באורך l.

בנוסף, הצמדת מחזורים זרים נותנת מחזורים זרים.

לכן, מבנה המחזורים נשמר.

בכיוון ההפוך, נתבונן ב $\sigma,\tau -$:

$$\sigma \quad = \quad (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)(6 \quad 7 \quad 8)(9 \quad 10 \quad 11)(12)$$

$$\tau \quad = \quad (7 \quad 1 \quad 6 \quad 10 \quad 5)(2 \quad 4 \quad 8)(11 \quad 3 \quad 12)(9)$$

מחפשים x כך ש $x\sigma x^{-1} = \tau -$.

פתרון: ניקח $x =\downarrow$.

חשבנו:

$$sgn\big((1\,2 \cdots l)\big) = (-1)^{l-1}$$

$$sgn(x\sigma x^{-1}) \ = sgn(\sigma)$$

לכן הסימן תלוי רק במבנה המחזורים, ובפרט:

$$sgn(\text{מחזור באורך } l) = (-1)^{l-1}$$

טענה

כל חבורה מסדר ראשוני p איזומופרית ל - $\mathbb{Z}_p$.

הוכחה

כל איבר שאינו איבר היחידה יוצר את החבורה ולכן היא ציקלית.

רשימה מלאה של החבורות הקטנות

לפי סדר החבורה:

$$\begin{array}{lc}
1: & \{1\} \\
2: & \mathbb{Z}_2 \\
3: & \mathbb{Z}_3 \\
4: & \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\
5: & \mathbb{Z}_5 \\
6: & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_6, S_3 \\
7: & \mathbb{Z}_7 \\
8: & \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, D_4, \square \\
9: & \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \\
10: & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_{10}, D_5 \\
11: & \mathbb{Z}_{11} \\
12: & \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, D_6, \square \\
13: & \mathbb{Z}_{13} \\
14: & \mathbb{Z}_{14}, D_7 \\
15: & \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_{15}
\end{array}$$

הגדרה

החבורה הדיהדרלית: יהי $n = 2m$ מספר זוגי.

מציירים מצולע עם m צלעות.

$$D_m = \left\{ \omega \in S_m \quad \middle| \quad \begin{array}{c} \text{על שומרת } \omega \\ \text{המבנה של המצולע} \end{array} \right\} = \langle \sigma, \tau \rangle$$

כאשר:

$$\sigma = (1 \quad 2 \quad \cdots \quad m), \qquad \tau = (1 \quad m)(2 \quad m-1)(3 \quad m-2) \cdots$$

התמורה τ מייצגת שיקוף ביחס לציר סימטריה.

$$|D_m| = 2m$$