תרגיל:

מצאו את נקודות הקיצון של $f(x,y,z)=-x+2y+2z$ תחת האילוצים:

$$g_1(x,y,z)=y+2z-1=0, g_2(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$$

פתרון:

$f$ תקבל מקסימום ומינימום תחת האילוצים שלנו מכיוון שהקבוצה המוגדרת על ידיהם:

$$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{c} x^2+y^2=2 \\ y+2z=1 \end{array}\right\}$$

היא קומפקטית.

אם כן, הלגראנז'יאן שלנו היא:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$$

נשווה $\nabla L=0$:

$$\begin{cases} L_x=-1+2\lambda_2 x=0 \\ L_y=2+\lambda_1+2\lambda_2 y=0 \\ L_z=2+2\lambda_1=0 \\ L_{\lambda_1}=y+2z-1=0 \\ L_{\lambda_2}=x^2+y^2-2=0 \end{cases}$$

מהמשוואה השלישית נקבל $\lambda_1=-1$ חיש־קל.

נציב זאת במשוואה השנייה, ועם המשוואה הראשונה נקבל:

$$x=\frac{1}{2\lambda_2}, y=-\frac{1}{2\lambda_2}$$

נציב זאת במשוואת האילוץ השני:

$$\left(\frac{1}{2\lambda_2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2\lambda_2}\right)^2-2=0$$

לפיכך, $\lambda_2 = \pm\frac{1}{2}$.

כאשר $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, נקבל $x = 1, y = -1$ ומהאילוץ הראשון נקבל $z = -1$.

כאשר $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, נקבל $x = -1, y = 1$ ומהאילוץ הראשון נקבל $z = 0$.

אם כך, קיבלנו שתי נקודות: $(1,-1,1)\,,(-1,1,0)$.

נבדוק מהו ערך הפונקציה בכל אחת מהן:

$$f\,(1,-1,1) = -1, f\,(-1,1,0) = 3$$

לכן $(1,-1,1)$ נקודת מינימום, $(-1,1,0)$ נקודת מקסימום.