תרגיל בית 3 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ח

שאלה 1. יהי F שדה, ויהי R חוג. הוכיחו שאם $\varphi\colon F \to R$ אפימורפיזם של חוגים, אז גם R שדה.

שאלה 2. יהי R חוג, ויהיו $I, J, K \lhd R$ אידאלים.

א. הוכיחו $(I \cap J)(I \cap J) \subseteq IJ \subseteq (I \cap J)$.

ב. הוכיחו $I(J+K) = IJ + IK$.

שאלה 3. יהי R חוג, ויהי $I \lhd R$ אידאל. ראינו כי $M_n(I) \lhd M_n(R)$ (לא בטוחים למה זה נכון? הוכיחו זאת!). הוכיחו

$$M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$$

שאלה 4. יהי $\mathbb{H}$ חוג הקווטרניונים של המילטון.

א. הוכיחו כי $\mathbb{H}$ אינו איזומורפי לחוג $M_2(\mathbb{R})$. שימו לב שזה מפתיע, כי שניהם חוגים פשוטים ושהם איזומורפיים כמרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$ (שניהם ממימד 4).

ב. רשות: הוכיחו שהחוג

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{C} \right\}$$

איזומורפי לחוג $M_2(\mathbb{R})$. רמז: הראו שהחוגים האלו צמודים כתת־חוגים של $M_2(\mathbb{C})$. בדרך אחרת, למי שמכיר, מצאו מערכת של יחידות מטריצה ובנו את האיזומורפיזם בינהם בעזרתה.

שאלה 5. יהי R חוג. איבר $e \in R$ יקרא אידמפוטנט אם $e^2 = e$. אידמפוטנט $e \in R$ הוא לא טריוויאלי אם $e \neq 0_R, 1_R$. בתרגיל הזה נמצא דרך לזהות שחוג R הוא מכפלה ישרה של חוגים.

א. יהיו S, S' חוגים. הוכיחו שאם $R \cong S \times S'$, אז קיים ב-R אידמפוטנט מרכזי לא טריוויאלי.

ב. אידמפוטנטים $e, f \in R$ נקראים אידמפוטנטים אורתוגונליים אם $ef = fe = 0$. הוכיחו שאם $e \in R$ אידמפוטנט, אז גם $1 - e$ אידמפוטנט. הוכיחו כי e ו-$1 - e$ הם אורתוגונליים.

ג. הוכיחו שאם $e \in R$ הוא אידמפוטנט מרכזי לא טריוויאלי, אז קיים איזומורפיזם של חוגים $\varphi\colon R \to Re \times R(1-e)$. רמז: זה סעיף קצת ארוך, אבל בעיקר טכני. כתבו במפורש לכל $x \in R$ מהו $\varphi(x)$ ובדקו שאכן מדובר באיזומורפיזם של חוגים.

בשתי השאלות הבאות, שיש להן סגנון דומה, נשתמש בסימון $I \leq_l R$ כדי לומר ש-I הוא אידאל שמאלי של R. כלומר $RI \subseteq I$.

שאלה 6. יהי R חוג בלי יחידה, ויהי $I \leq_l R$ אידאל שמאלי. נסמן $I^+ = \{x \in R \,|\, xR \subseteq I\}$.

א. הוכיחו $I^+ \lhd R$ אידאל דו־צדדי.

ב. הוכיחו שאם $I \lhd R$, אז $I \subseteq I^+$.

ג. הוכיחו שאם R חוג (עם יחידה), אז $I^{++} = I^+$.

שאלה 7. יהי R חוג, ותהי $A \subseteq R$ תת־קבוצה. נגדיר את המאפס השמאלי של A להיות

$$\mathrm{Ann}_l(A) = \{x \in R \,|\, \forall a \in A, xa = 0\}$$

א. הוכיחו כי $\mathrm{Ann}_l(A) \leq_l R$ אידאל שמאלי.

ב. הוכיחו שאם $A \leq_l R$, אז $\mathrm{Ann}_l(A) \lhd R$.

ג. נניח $A, B \subseteq R$ תת־קבוצות המכילות את 0. הוכיחו

$$\mathrm{Ann}_l(A + B) = \mathrm{Ann}_l(A) \cap \mathrm{Ann}_l(B)$$

בהצלחה!