פתרוןתרגיל בית 8 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תש״ף

שאלה 1. בכל סעיף קבעו ונמקו האם החבורות איזומורפיות. רמז כללי: סדרים של איברים.

1. החבורה $\mathbb{Z}_{40}$ והחבורה $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_4$.
2. החבורה $\mathbb{Z}_{33}$ והחבורה $\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_3$.
3. החבורה S_4 והחבורה $\mathbb{Z}_2\times A_4$.
4. החבורה S_5 והחבורה D_{60}.
5. החבורה $\mathbb{C}^*$ והחבורה

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\in M_2\left(\mathbb{R}\right):a^2+b^2>0\right\}$$

עם הפעולה של כפל מטריצות (שכבר הראיתם שהיא חבורה).

פתרון.
1. החבורות הן לא איזומורפיות. בחבורה $\mathbb{Z}_{40}$ יש איבר מסדר 40, ואילו בחבורה $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_4$ הסדר המירבי של איבר הוא 20.
2. החבורות איזומורפיות. אפשר לראות ששתיהן ציקליות, למשל $\mathbb{Z}_{33}=\langle 1\rangle$ ו-$\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_3=\langle(1,1)\rangle$, ואנחנו יודעים שמכל סדר יש רק חבורה ציקלית אחת עד כדי איזומורפיזם. בכיתה הראנו איזומורפיזם בין חבורות כאלו, ספציפית

$$\begin{aligned} f:\mathbb{Z}_{33}&\to\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_3\\ x&\mapsto\left(x\left(\mathrm{mod}11\right),x\left(\mathrm{mod}3\right)\right)\end{aligned}$$

3. החבורות לא איזומורפיות. ראינו בכיתה שהסדרים האפשריים של איברים ב-S_4 הם $1,2,3,4$. בחבורה $\mathbb{Z}_2\times A_4$ יש איברים מסדר 6, כמו למשל $(1,(123))$. למי שהחישוב אינו ברור, הזכרו מה הוא הסדר של איבר במכפלה קרטזית.
4. החבורות לא איזומורפיות. ראינו בכיתה שהסדרים האפשריים של איברים ב-S_5 הם $1,2,\ldots,6$. בחבורה D_{60} יש איברים מסדר 60, כמו למשל σ.
5. החבורות איזומורפיות. נגדיר את האיזומורפיזם $\varphi:G\to\mathbb{C}^*$ לפי $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right)\mapsto a+bi$. ברור כי זו העתקה חח״ע ועל (מי היא ההעתקה ההופכית?). נשאר להראות כי זהו

הומומורפיזם של חבורות: יהיו איברים $M_1, M_2 \in G$ ונרצה להראות כי $\varphi(M_1M_2) = \varphi(M_1)\varphi(M_2)$. נניח כי

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

ועל ידי חישוב ישיר נקבל את הדרוש:

$$\begin{aligned}\varphi(M_1M_2) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}\right) \\ &= ac-bd+(ad+bc)i = (a+bi)(c+di) = \varphi(M_1)\varphi(M_2)\end{aligned}$$

שאלה 2. תהי G חבורה ותהי $H \le G$. נגדיר את הליבה של H ב-G להיות

$$\text{Core}(H) = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$$

1. הוכיחו כי $\text{Core}(H) \le G$. רמז: יותר קל להתחיל בהוכחת $gHg^{-1} \le G$ לכל $g \in G$.
2. הוכיחו ש-$\text{Core}(H)$ היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-H.
3. תנו דוגמה לחבורה G, ולשתי תת־חבורות לא טריוויאליות H, K (הן לא G ולא $\{e\}$) כך ש-$\text{Core}(H) = \{e\}$ וגם $\text{Core}(K) = K$.

פתרון.

1. נעזר ברמז ונוכיח $gHg^{-1} \le G$ לכל $g \in G$. יהיו $h_1, h_2 \in H$. נבדוק סגירות לכפל:

$$\left(gh_1g^{-1}\right)\left(gh_2g^{-1}\right) = gh_1(gg^{-1})h_2g^{-1} = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1}$$

כי $h_1h_2 \in H$. נבדוק סגירות להופכי:

$$(gh_1g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1}h_1^{-1}g^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$$

כי $h_1^{-1} \in G$. נותר להראות ש-gHg^{-1} לא ריקה: היא מכילה את איבר היחידה כי $e = geg^{-1} \in gHg^{-1}$. מפני ש-$gHg^{-1} \le G$ לכל $g \in G$, אז גם החיתוך של כולן הוא גם תת־חבורה. כלומר $\text{Core}(H) \le G$.

2. מכיוון ש-$H = eHe^{-1}$ מופיע בחיתוך בהגדרת הליבה, אז ברור ש-$\text{Core}(H) \subseteq H$. יהי $x \in \text{Core}(H)$ ו-$a \in G$ ונראה ש-$\text{Core}(H)$ סגורה להצמדה. נראה כי $axa^{-1} \in gHg^{-1}$ לכל $g \in G$, ונסיק ש-axa^{-1} שייך לחיתוך של כל gHg^{-1}, כלומר לליבה של H. אכן, מפני ש-$a^{-1}g \in G$, אז

$$x \in \text{Core}(H) \subseteq a^{-1}gH\left(a^{-1}g\right)^{-1} = a^{-1}gHg^{-1}a$$

ולכן $axa^{-1} \in aa^{-1}gHg^{-1}aa^{-1} = gHg^{-1}$. לכן $\text{Core}(H) \lhd G$.
תהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. אז לכל $g \in G$, $N = gNg^{-1}$. אם $N \subseteq H$ נקבל

$$N = gNg^{-1} \subseteq gHg^{-1}$$

לכל $g \in G$. לכן $N \subseteq \bigcap_{g\in G} gHg^{-1} = \mathrm{Core}(H)$.
דרך אחרת: ראינו ש-G פועלת על הקבוצה G/H ולכן יש הומומורפיזם $\varphi\colon G \to S_{G/H}$.
אפשר לראות ש-$\ker\varphi = \mathrm{Core}(H)$, ולכן היא בודאי תת־חבורה נורמלית, וזה מוכיח גם את הסעיף הקודם.

3. הבינו מדוע חייבים לבחור חבורה לא אבלית. אנחנו נבחר לדוגמה את $G = S_3$, $H = \langle(12)\rangle$ ו-$K = A_3$. מפני ש-$K \lhd G$, אז לפי הסעיף הקודם $\mathrm{Core}(K) = K$ כי היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של S_3 שמוכלת ב-K. ראינו בכיתה כי H אינה תת־חבורה נורמלית של S_3. לכן $\mathrm{Core}(H) \subsetneq H$. אבל H מסדר 2, ולכן בהכרח $\mathrm{Core}(H) = \{e\}$, שהיא מסדר 1.

שאלה 3. נגיד שחבורה היא פשוטה אם אין לה תת חבורות נורמליות פרט לעצמה ול$\{e\}$.
תהי G חבורה פשוטה. הוכיחו כי אם $f: G \to H$ הוא הומומורפיזם אז הוא או שיכון (חח״ע) או ההעתקה הטריוויאלית (ששולחת כל איבר לאיבר היחידה).

פתרון. אם $f\colon G \to H$ הומומורפיזם, אז $\ker f$ הוא תת-חבורה נורמלית של G. אבל G היא פשוטה ולכן או ש $\ker f = \{e\}$ מה שאומר שf הוא שיכון, או ש $\ker f = G$ מה שאומר שf הוא ההעתקה הטריוויאלית.

שאלה 4. תהי G חבורה, ו$A, B \leq G$. הוכיחו או הפריכו: אם A וB תת חבורות נורמליות בG, אז $A \cap B \lhd G$.

פתרון. אנחנו כבר יודעים שחיתוך תת חבורות הוא תת חבורה. נותר להוכיח את הנורמליות.
יהי $x \in A \cap B$ ו$g \in G$. מכיוון שA וB שתיהן נורמליות, נקבל ש $g^{-1}xg \in A$ וגם $g^{-1}xg \in B$. לכן $g^{-1}xg \in A \cap B$. כלומר, $A \cap B$ נורמלית.

שאלה 5. בסעיפים הבאים, קבעו האם $H \lhd G$ (אין צורך לבדוק אם H היא תת חבורה).

1. $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$
2. $G = GL_n(\mathbb{F})$, $H = \{\alpha I, \alpha \in \mathbb{F}^{\times}\}$
3. $G = GL_n(\mathbb{F})$. יהי $P \in GL_n(\mathbb{F})$. $H = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid AP = P\}$
4. $G = S_n$. $H = \{\sigma \in S_n, \sigma(1) = 1\}$

פתרון. 1. יהי $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, ו$\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G$. נשים לב ש $\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & -\frac{c}{bd} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$.
נחשב:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b} & -\frac{c}{bd} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{ad}{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

לכן H תת חבורה נורמלית.
2. יהי $A \in GL_n(\mathbb{F})$ ו$\alpha I \in H$. נחשב:

$$A^{-1}(\alpha I)A = \alpha I \in H$$

לכן H תת חבורה נורמלית.

3. יהי $M \in GL_n(\mathbb{F})$ ו־$A \in H$. נחשב:

$$(M^{-1}AM)P = (M^{-1}APP^{-1}M)P = M^{-1}(AP)P^{-1}MP = M^{-1}PP^{-1}MP = P$$

כלומר, $M^{-1}AM \in H$. לכן H תת חבורה נורמלית.

4. אינה תת חבורה נורמלית. נקח לדוגמא $(2,3) \in H$ ו־$(1,2) \in S_n$. אז

$$(1,2)(2,3)(1,2) = (1,3) \notin H$$

.

נעיר שאם $n = 2$ אז $H = \{Id\}$ ולכן במקרה זה H תת חבורה נורמלית.