הסתברות וסטטיסטיקה מתמטית - תרגול 8

מרטינגלים

הגדרה:

א. תהי I קבוצת אינדקסים (בדידה או רציפה), ונניח שלכל $t \in I$ מוגדר משתנה מקרי $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. אז למשפחה $\{X_t\}$ קוראים <u>תהליך סטוכסטי</u>.

ב. <u>פילטרציה</u> (או סינון) היא אוסף של σ-אלגברות $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ כך שאם $t \leq s$, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}$.

ג. אומרים ש-$\{X_t\}$ <u>מותאם</u> לפילטרציה $\{\mathcal{F}_t\}$ אם לכל X_t הוא $\mathcal{F}_t$-מדיד.

דוגמה:

כל תהליך סטוכסטי מותאם לסינון הטבעי שלו $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s \mid s \leq t, s \in I)$.

הגדרה:

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות, תהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קבוצת אינדקסים, תהי $\{\mathcal{F}_t\}$ פילטרציה ויהי $\{X_t\}$ תהליך סטוכסטי שמותאם ל-$\{\mathcal{F}_t\}$. אז: $(\mathbb{E}[|X_t|] < \infty)$

א. X_t <u>מרטינגל</u> אם לכל $s<t$, $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$.

ב. X_t <u>תת-מרטינגל</u> אם לכל $s<t$, $X_s \leq \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s]$.

ג. X_t <u>על-מרטינגל</u> אם לכל $s<t$, $X_s \geq \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s]$.

במקרה הבדיד $I = \mathbb{N}_0$, מספיק לבדוק $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \underset{\geq}{\overset{=}{\leq}} X_n$.

דוגמה:

אם $X_1, X_2, \ldots$ ממ"בות, $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ מרטינגל.

מה היה קורה אם $\mathbb{E}[X_n] = \mu_n$ לא בהכרח 0? היינו יכולים להגדיר

$$M_n = S_n - \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

דוגמה:

אם $X_1, X_2, \dots$ ממב"ת, $\mathbb{E}[X_n]=1$, אז $Y_n=\prod_{i=1}^{n} X_i$ מרטינגל.

הוכחה:

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid X_1,\dots,X_n] = \mathbb{E}[Y_n \cdot X_{n+1} \mid X_1,\dots,X_n] \underset{\text{TOWIK}}{=} Y_n \cdot \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1,\dots,X_n] =$$

$$\underset{X_1,\dots,X_{n+1} \text{ ב"ת}}{=} Y_n \cdot \mathbb{E}[X_{n+1}] = Y_n$$

דוגמה:

$X_1, X_2, \dots$ ממבתש"ה, $\mathbb{E}[X_i]=0$, $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ מרטינגל. $\sigma^2 = Var(X_n)$.

אז $S_n^2 - \sigma^2 n$ מרטינגל.

תרגיל:

נניח $X_i = \begin{cases} 1, & p \\ -1, & 1-p \end{cases}$, $p \neq \frac{1}{2}$. $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$. הראו שקיים $\alpha \neq 1,0$

שעבורו α^{S_n} מרטינגל. (= המרטינגל האקספוננציאלי).

פתרון:

$$\mathbb{E}[\alpha^{S_{n+1}} \mid X_1,\dots,X_n] = \mathbb{E}[\alpha^{S_n + X_{n+1}} \mid X_1,\dots,X_n] = \mathbb{E}[\alpha^{S_n} \cdot \alpha^{X_{n+1}} \mid X_1,\dots,X_n] =$$

$$\underset{\text{TOWIK}}{=} \alpha^{S_n} \cdot \mathbb{E}[\alpha^{X_{n+1}} \mid X_1,\dots,X_n] \underset{\text{ב"ת}}{=} \alpha^{S_n} \cdot \mathbb{E}[\alpha^{X_{n+1}}] =$$

$$= \alpha^{S_n} \cdot \left(\alpha \cdot p + \frac{1}{\alpha}(1-p)\right) \overset{?}{=} \alpha^{S_n}$$

$$\alpha p + \frac{1}{\alpha}(1-p) = 1 \qquad | \cdot \alpha$$

$$p\alpha^2 - \alpha + (1-p) = 0$$

$$\alpha = 1, \qquad \boxed{\alpha = \frac{1-p}{p}}$$

דוגמה: (הכד של פוליה, Polya's Urn)

מתחילים עם כד שיש בו שני כדורים, אחד כתום ואחד ירוק. מוציאים את אחד הכדורים, מסתכלים על הצבע, ואז מחזירים לכד את הכדור שהוצאנו יחד עם כדור מאותו הצבע.

$G_n =$ כמות הכדורים הירוקים בצעד ה-n.

$$\mathbb{E}[G_{n+1}|G_1,\dots,G_n] = \frac{G_n}{n+1}\cdot(G_n+1)+\left(1-\frac{G_n}{n+1}\right)\cdot G_n =$$

$$= \frac{G_n}{n+1}\left(\cancel{G_n}+1+n+1-\cancel{G_n}\right) = \frac{n+2}{n+1}G_n$$

לכן $M_n=\frac{1}{n+1}G_n$ מרטינגל.

טענה:

אם X_n מרטינגל, לכל n מתקיים $\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[X_0]$.

מסקנה:

$\mathbb{E}\left[\frac{G_n}{n+1}\right]=\mathbb{E}\left[\frac{G_1}{2}\right]=\frac{1}{2}$.

דוגמה: (מרטינגל חשיפת מידע)

אם $X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\{\mathcal{F}_t\}$ פילטרציה, $Y_t=\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$ מרטינגל.

טענה:

אם X_n מרטינגל ו- $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה אז $\varphi(X_n)$ הוא תת-מרטינגל.

תרגיל:

נניח ש- X_n מרטינגל. נגדיר את סדרת ההפרשים $Y_n=X_n-X_{n-1}$.

א. הראו כי $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]=0$.

ב. אם $X_0=0$ ו- $\mathbb{E}[X_n^2]<\infty$, אז $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ בלתי-מתואמים בזוגות, וגם $\mathbb{E}[X_n^2]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[Y_i^2]$.

הוכחה:

א. $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]=\mathbb{E}[X_n-X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}]=\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]-X_{n-1}=X_{n-1}-X_{n-1}=0$

ב. נתחיל מלהסביר למה לכל Y_i יש מומנט שני סופי. מספיק להראות שזה נכון לכל X_i.

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_i]^2\right] \underset{\text{ינסן}}{\le} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_n^2|\mathcal{F}_i]\right] = \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$$

$$Cov(Y_i, Y_{i+j}) = \mathbb{E}[Y_iY_{i+j}] - \underbrace{\mathbb{E}[Y_i]\mathbb{E}[Y_{i+j}]}_{0 \text{ מסעיף א'}} = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Y_i Y_{i+j}|\mathcal{F}_i]\right] =$$

$$= \mathbb{E}\Big[Y_i \cdot \underbrace{\mathbb{E}[Y_{i+j}|\mathcal{F}_i]}_{0 \text{ מסעיף א'}}\Big] = 0$$

ואז הטענה על המומנטים השניים נובעת מחישוב ישיר

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \Rightarrow \mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}[Y_iY_j] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i^2]$$