פתרון תרגיל בית 8 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ט"ו טבת ה'תשע"ו, 27.12.2015.

שאלה 1. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת־חבורה. נגדיר את המנרמל (או הנורמליזטור) של H ביחס ב-G להיות

$$N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$$

א. הוכיחו כי $N_G(H) \leq G$.

ב. הוכיחו כי $H \lhd N_G(H)$.

ג. הסבירו מדוע $N_G(H)$ היא תת־החבורה הגדולה ביותר של G שבה H נורמלית. הסיקו כי $H \lhd G$ אם ורק אם $N_G(H) = G$.

פתרון. א. המנרמל $N_G(H)$ לא ריק כי $e \in N_G(H)$, שהרי $eH = He$ לכל תת־חבורה של G. נשתמש בקריטריון המקוצר לתת־חבורה. יהיו $x, y \in N_G(H)$. לכן

$$xy^{-1}H = xHy^{-1} = Hxy^{-1}$$

כי $xH = Hx$ ומפני ש-$yH = Hy$, אז בכפל משמאל ומימין ב-y^{-1} נקבל $Hy^{-1} = y^{-1}H$. לכן $xy^{-1} \in N_G(H)$, ולכן $N_G(H) \leq G$.

ב. אנחנו ידועים שלכל $h \in H$ מתקיים $hH = H = Hh$. לכן $H \subseteq N_G(H)$, ולכן $H \leq N_G(H)$. לפי הגדרה לכל $x \in N_G(H)$ מתקיים $xH = Hx$. לכן $H \lhd N_G(H)$.

ג. תהי תת־חבורה נורמלית $K \lhd G$ המכילה את H. לפי הגדרה לכל $x \in K$ מתקיים $xH = Hx$, ולכן $x \in N_G(H)$. כלומר $K \subseteq N_G(H)$.
אם $G = N_G(H)$, אז H נורמלית ב-G לפי הסעיף הקודם. בכיוון השני, אם H נורמלית ב-G אם לכל $x \in G$ מתקיים $xH = Hx$, כלומר אם $G = N_G(H)$.

שאלה 2. תהי G חבורה. עבור איבר $a \in G$ נגדיר את המְרַכֵּז של a להיות

$$C_G(a) = \{g \in G | ga = ag\}$$

א. הוכיחו כי $Z(G) = \bigcap_{a \in G} C_G(a)$.

ב. הוכיחו כי $C_G(a) \leq G$. הסיקו כי $Z(G) \leq G$ (כלומר בלי להוכיח ישירות ש-$Z(G)$ תת־חבורה).

ג. מצאו חבורה G ואיבר $a \in G$ כך ש-$\langle a \rangle \lneq C_G(a) \lneq G$. האם ניתן למצוא חבורה G ואיבר $a \in G$ כך ש-$C_G(a) \lneq N_G(\langle a \rangle)$? (הסימון $\lneq$ משמעו תת־חבורות המוכלות ממש.)

פתרון. א. אם $x \in Z(G)$, אז הוא מתחלף עם כל איבר של G. לכן $x \in C_G(a)$ עבור כל $a \in G$, ולכן $x \in \bigcap_{a\in G} C_G(a)$. בכיוון השני, אם x נמצא בחיתוך כל המרכזים, אזי הוא מתחלף עם כל איבר של G, ולכן $x \in Z(G)$.

ב. המרכז $C_G(a)$ אינו ריק כי $ea = ae$, ולכן $e \in C_G(a)$. יהיו $x, y \in C_G(a)$. לכן $xa = ax$ וגם $ya = ay$, ולכן $ay^{-1} = y^{-1}a$. נחשב כי

$$xy^{-1}a = xay^{-1} = axy^{-1}$$

ולכן $xy^{-1} \in C_G(a)$. כלומר $C_G(a) \leq G$. ראינו שחיתוך של תת־חבורות הוא תת־חבורה, ולכן גם $Z(G)$ היא תת־חבורה של G לפי הסעיף הקודם.

ג. חייבים לבחור חבורה G שאינה אבלית (בחבורה אבלית מתקיים $C_G(a) = G$ לכל איבר $a \in G$). נבחר את D_6, הנוצרת על ידי σ ו-τ. נבחר את האיבר $a = \sigma^2$. אנחנו יודעים כי $\left\langle\sigma^2\right\rangle = \left\{\mathrm{id}, \sigma^2, \sigma^4\right\}$. כל חזקה של σ מתחלפת עם σ^2, ואפשר לראות ששיקוף (כלומר איבר מן הצורה $\tau\sigma^i$) לא מתחלף עם σ^2. לכן $C_{D_6}(\sigma^2) = \langle\sigma\rangle$. בסך הכל קיבלנו

$$\left\langle\sigma^2\right\rangle \lneq \langle\sigma\rangle = C_G(a) \lneq D_6 = G$$

אפשרות אחרת היא החבורה $G = GL_2(\mathbb{R})$, ונבחר את האיבר $a = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. מתקיים כי

$$\langle a\rangle = \left\{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

ועבור $b = \left(\begin{smallmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{R})$ יתקיים $ab = ba$ אם ורק אם b הוא מן הצורה $\left(\begin{smallmatrix}x_{11} & x_{12}\\ 0 & x_{11}\end{smallmatrix}\right)$. לכן $\langle a\rangle \lneq C_G(a)$. ברור שלא כל מטריצה ב-$GL_2(\mathbb{R})$ היא מן הצורה הנ"ל, ולכן $C_G(a) \lneq G$.
יתכן כי $C_G(a) \lneq N_G(\langle a\rangle)$. למשל בחבורה D_n, עבור $n \geq 3$ ו-$a = \sigma$ יתקיים כי $\tau \notin C_{D_n}(\sigma)$, אבל $\langle\sigma\rangle \lhd D_n$, ולכן $N_{D_n}(\langle\sigma\rangle) = D_n$.

שאלה 3. נתבונן בחבורה $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. הראו כי תת־החבורה $H = \left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{3}{14} + \mathbb{Z}\right\rangle$ (שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{2}{5}$ ו-$\frac{3}{14}$) היא ציקלית. מצאו את האינדקס $[G : H]$.

פתרון. א. איבר היחידה בחבורה G הוא המחלקה $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + 0$. לכן יש למצוא לכל $x \in G$ מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כך שנקבל $n \cdot x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. שימו לב כי החבורה חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב-n.
כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ עבור $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$. מכאן קל לראות כי $b \cdot \left(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}\right) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. לכן x הוא לכל היותר מסדר (סופי) b. נניח כי $\frac{a}{b}$ הוא שבר מצומצם, ולכן הסדר של x במקרה זה הוא בדיוק b. ברור שסדרת השברים $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתאימה לסדרה של איברים ב-G שסדרם עולה ממש.

ב. יש להוכיח שקיים $q \in \mathbb{Q}$ כך שמתקיים $\left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{3}{14} + \mathbb{Z}\right\rangle = \langle q + \mathbb{Z}\rangle$. נראה שאפשר לבחור את $q = \frac{1}{70}$. בשביל להראות הכלה דו־כיוונית, מספיק להראות הכלה של היוצרים. נשים לב כי $\frac{1}{70} = 7 \cdot \frac{2}{5} - 13 \cdot \frac{3}{14}$, ולכן $\left\langle \frac{1}{70} + \mathbb{Z}\right\rangle \subseteq \left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{3}{14} + \mathbb{Z}\right\rangle$.
מצד שני $\frac{2}{5} = 28 \cdot \frac{1}{70}$, $\frac{3}{14} = 15 \cdot \frac{1}{70}$, ולכן $\left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{3}{14} + \mathbb{Z}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{70} + \mathbb{Z}\right\rangle$.
סדר תת־החבורה H הוא 70 ואילו G היא אינסופית, ולכן האינדקס שלה היא אינסופי לפי משפט לגראנז'. בנוגע לאינדקס, אפשר להראות גם שלכל שני מספרים ראשוניים שונים שאינם מחלקים את 70 יתקיים כי $p_1 \neq p_2$ $p_1 + H \neq p_2 + H$ ולכן ישנן אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

שאלה 4. תהי G חבורה. הפריכו בעזרת דוגמאות נגד את הטענות השגויות הבאות:

א. אם $N, K \lhd G$ וגם $N \cong K$, אז ${}^{G}\!/_{N} \cong {}^{G}\!/_{K}$.

ב. אם $N \lhd G$ וגם ${}^{G}\!/_{N} \cong G$, אז $N = \{e_G\}$.

ג. אם $H \leq G$, אז $Z(H) \lhd G$.

ד. אם $H, K \leq G$, אז גם $HK \leq G$.

ה. אם $N \lhd G$ אבלית וגם ${}^{G}\!/_{N}$ אבלית, אז G אבלית.

פתרון. א. ראינו בכיתה כי $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ עבור $n \neq 0$. החבורה $G = \mathbb{Z}$ אבלית, ולכן כל תת־חבורה שלה היא נורמלית. כמו כן ראינו ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$. לכן אם נבחר $N = 2\mathbb{Z}$ ו-$K = 3\mathbb{Z}$ נקבל כי $N \cong K$, אבל המנות ${}^{G}\!/_{N} \cong \mathbb{Z}_2$ ו-${}^{G}\!/_{K} \cong \mathbb{Z}_3$ לא איזומורפיות כי הן מסדר שונה.

ב. ברור שחייבים לבחור חבורה אינסופית. הרי אם G סופית ו-$|N| > 1$, אז $|{}^{G}\!/_{N}| = |G| \,/\, |N|$ קטן ממש מ-$|G|$. הדרך הנוחה למצוא פתרון היא למצוא אפימורפיזם $f : G \to G$ שהוא לא מונומורפיזם. אז הגרעין שלו הוא תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים ${}^{G}\!/_{\ker f} \cong G$.
נבחר $G = \mathbb{C}^*$, ונגדיר אפימורפיזם $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ לפי $f(x) = x^2$. ודאו שאתם יודעים להוכיח שזהו אפימורפיזם. הגרעין $\ker f$ איננו טריוויאלי, כי גם $-1 \in \ker f$.
אפשרות אחרת היא $G = \mathbb{R}[x]$, אוסף הפולינומים הממשיים, עם הפעולה של חיבור פולינומים. אפשר לוודא שזו אכן חבורה, ושהיא אבלית. נבחר את אוסף הפולינומים הקבועים $H = \{a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\}$. ברור ש-$H \neq \{0\}$ (הפולינום הקבוע 0 הוא איבר היחידה ב-G), אבל מתקיים ${}^{G}\!/_{H} \cong G$. נסו למצוא דוגמאות נוספות (למשל מכפלה ישרה).

ג. כמעט כל חבורה לא אבלית ותת־חבורה שלה שנבחר תעבוד כדוגמה נגדית. למשל אם נבחר $G = D_4$ ואת $H = \langle \tau \rangle \leq G$. ידוע לנו כי H מסדר 2, ולכן אבלית. כלומר $Z(H) = H$. ראינו כבר מי הן תת־החבורות הנורמליות של D_4, וש-H היא לא אחת מהן.

ד. נשתמש בבחירות מן הדוגמה הקודמת. צריך לבחור תת־חבורה K שאינה נורמלית (אחרת HK תהיה תת־חבורה של G). נבחר $K = \langle \tau\sigma \rangle = \{\mathrm{id}, \tau\sigma\}$. הקבוצה $HK = \{\mathrm{id}, \tau, \tau\sigma, \sigma\}$ אינה תת־חבורה כי היא אינה סגורה לפעולה. למשל $\tau\sigma \cdot \sigma = \tau\sigma^2 \notin HK$. היא גם לא סגורה להופכי כי $\sigma^{-1} \notin HK$.

ה. נבחר את החבורה הלא אבלית הקטנה ביותר, S_3. תת־החבורה הנורמלית הלא טריוויאלית היחידה שלה היא A_3. ראינו כבר כי A_3 היא אבלית (למשל כי היא ציקלית), וחבורת המנה ${}^{S_3}\!/_{A_3}$ היא מסדר 2, ולכן גם היא אבלית.

שאלה 5. תהי G חבורה, ותהי $N \lhd G$.

א. תהי $H \leq G$. הוכיחו כי $N \cap H \lhd H$.

ב. הוכיחו כי $Z(N) \lhd G$. שימו לב כי שברור ש-$Z(N) \lhd N$, אבל כאן צריך להראות נורמליות בתוך G.

פתרון. א. אנחנו כבר יודעים שחיתוך תת־חבורות הוא תת־חבורה. יהי $x \in N \cap H$ וצריך להוכיח כי לכל $h \in H$ מתקיים כי $h^{-1}xh \in N \cap H$. אם $x, h \in H$, אז מפני ש-H סגורה להופכי ולמכפלה ברור כי $h^{-1}xh \in H$. נתון כי $N \lhd G$, ולכן לכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1}xg \in N$, ובפרט אם $g \in H$. לכן $h^{-1}xh \in N \cap H$, כדרוש.

ב. מפני ש-$Z(N) \leq N$ וגם $N \leq G$, אז ברור ש-$Z(N) \leq G$. נותר להראות נורמליות. כלומר צריך להראות שלכל $g \in G$ מתקיים $gZ(N)g^{-1} \subseteq Z(N)$.
יהי $x \in gZ(N)g^{-1}$. לכן קיים $z \in Z(N)$ כך ש-$x = gzg^{-1}$. צריך להראות כי לכל $n \in N$ מתקיים $nx = xn$, כי לפי הגדרת $Z(N)$, לכל $n \in N$ מתקיים $nz = zn$.
מפני ש-N נורמלית ב-G, אז לכל $g \in G$ מתקיים כי $gzg^{-1} \in N$ וגם $gng^{-1} \in N$.
נסתכל על המשוואה $ngzg^{-1} = gzg^{-1}n$ ונכפול אותה מימין ב-g ומשמאל ב-g^{-1} ונקבל $g^{-1}ngz = zg^{-1}ng$. אבל $g^{-1}ng = n'$ עבור איזשהו $n' \in N$. לכן המשוואה שקולה למשוואה $n'z = zn'$, והיא מתקיימת כי $z \in Z(N)$.

שאלה 6. יהי הומומורפיזם $f : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{12}$. רמז כללי: משפט האיזומורפיזם הראשון.

א. הוכיחו כי $|\mathrm{im}\, f| \in \{1, 3\}$.

ב. לכל אחת מהאפשרויות בסעיף הקודם ענו האם f הוא מונומורפיזם? האם הוא אפימורפיזם?

ג. נסמן $K = \ker f$. האם יתכן כי $\mathbb{Z}_{15}/K \cong \mathbb{Z}_3$? האם יתכן כי $\mathbb{Z}_{15}/K \cong \mathbb{Z}_4$? האם יתכן כי $\mathbb{Z}_{15}/K \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$? בכל פעם שקבעתם שכן, מצאו דוגמה של f ושל K באופן מפורש.

פתרון. א. נסמן $K = \ker f$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים

$$\mathbb{Z}_{15}/K \cong \mathrm{im}\, f$$

ולכן $|\mathrm{im}\, f| = |\mathbb{Z}_{15}| / |K|$. כלומר $|\mathrm{im}\, f| \mid 15$. מצד שני $\mathrm{im}\, f \leq \mathbb{Z}_{12}$, ולכן $|\mathrm{im}\, f| \mid 12$. מספר טבעי המחלק את 15 וגם את 12 יכול להיות רק 1 או 3, כדרוש.

ב. f יהיה אפימורפיזם רק אם $|\mathrm{im}\, f| = 12$, ולפי הסעיף הקודם זה לא יתכן. בנוסף לא יתכן ש-f חח"ע, כי עוצמת הטווח $|\mathbb{Z}_{12}| = 12$ קטנה ממש מעוצמת המקור $|\mathbb{Z}_{15}| = 15$, ולכן f לא מונומורפיזם.

ג. אם $|\mathrm{im}\, f| = 1$, אז $|K| = 15$. כלומר f במקרה זה הוא ההומומורפיזמים הטריוויאלי, ונקבל $\mathbb{Z}_{15}/K \cong \{e\}$. אם $|\mathrm{im}\, f| = 3$, אז $|K| = 5$. החבורה $\mathbb{Z}_{15}$ היא ציקלית סופית, ולכן יש לה תת־חבורה אחת מכל סדר המחלק את סדרה. האפשרות היחידה במקרה זה היא $K = \{0, 3, 6, 9, 12\}$. חבורת המנה $\mathbb{Z}_{15}/K$ היא מסדר 3, ולכן בהכרח איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$. שאר האפשרויות המופיעות בשאלה לא יתכנו.

בהצלחה!