

פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 11

1. העתקות מביוס גזירות בכל נק' פרט לזו שבה המכנה מתאפס – ואילו השיקוף אינו גזיר באף נק'.

2. כאשר $f = g \circ h$ כאשר $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$, $h(z) = e^z$. מעבירה את הרצועה חח"ע על חצי המישור העליון, וההעתקה g מעתיקה את חצי המישור העליון על עיגול היחידה.

3. ההעתקה $f(z) = \frac{1}{z-1}$ מעבירה את התחום לרצועה $\{z: -1 < \operatorname{Re}(z) < 0\}$. ע"י הזזה, מתיחה וסיבוב ניתן להגיע לרצועה $\{z: 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ ומשם הפונקציה e^z מגיעה לחצי המישור העליון.

4. $f(z) = \frac{e^{z+\pi/2i} - i}{e^{z+\pi/2i} + i}$. ברגע שמוסיפים $\frac{\pi}{2}i$, אפשר להשתמש בשאלה 2.

5. יהיו D, E תחומים $f: D \rightarrow E, g: E \rightarrow \mathbb{C}$ קונפורמיות, אזי $g \circ f$ גם היא קונפורמית.

הוכחה: הרכבת הפונקציות האנליטיות היא גם אנליטית, וע"פ כלל השרשרת $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ וזה לא יכול להתאפס כי f', g' אינן מתאפסות.