פתרון תרגיל בית 7 – טופולוגיה

שאלה 1

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא פתוחה/ סגורה/ רציפה:

א. $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

ב. $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_2(x)=\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

ג. $f_3:X\to\mathbb{R}$ עבור $X=[2,3]\cup[4,5)$ המוגדרת ע"י $f_3(x)=\begin{cases}1 & x\in[2,3]\\ x & x\in[4,5)\end{cases}$.

פתרון

א) הפונקציה <u>לא רציפה</u> שכן אינה רציפה ב-0. ניתן להוכיח למשל עפ"י היינה $\frac{1}{n}\to 0$ אבל $f_1\left(\frac{1}{n}\right)=n\not\to 1=f_1(0)$.

הפונקציה <u>אינה פתוחה</u> כי למשל $(-1,1)$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_1((-1,1))=[1,\infty)$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>אינה סגורה</u> כי למשל $[0,\infty)$ סגורה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_1([0,\infty))=\{1\}\cup(0,\infty)=(0,\infty)$ ו- $(0,\infty)$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

ב) הפונקציה <u>לא רציפה</u>. ניתן להוכיח זאת למשל ע"י כך ש $\{1\}$ סגורה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_2^{-1}(\{1\})=\mathbb{Q}$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>אינה פתוחה</u>: $\mathbb{R}$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_2(\mathbb{R})=\{0,1\}$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>סגורה</u>: לכל $A\subseteq\mathbb{R}$ (ובפרט עבור A סגורה) $f_2(A)$ סגורה. אמנם, אם $A=\varnothing$ נקבל $f_2(A)=\varnothing$. אם $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{Q}$ נקבל $f_2(A)=\{1\}$. אם $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ נקבל $f_2(A)=\{0\}$ ובכל מקרה אחר נקבל $f_2(A)=\{0,1\}$.

ג) הפונקציה <u>רציפה</u> שכן היא מוגדרת באמצעות שתי הפונקציות הבאות: $h:[2,3]\to\mathbb{R},\quad h(x)=1$, $g:[4,5)\to\mathbb{R},\quad g(x)=x$. שתי הפונקציות רציפות (h פונקציה קבועה ו- g פונקציית ההכלה). $\{[2,3],[4,5)\}$ כיסוי פתוח ל X

(למעשה $[2,3]$ וכן $[4,5)$ אפילו סגוחות ב X (בדקו!)). $[2,3]\cap[4,5)=\varnothing$.
לכן מתקיימים תנאי המשפט שמבטיח רציפות של f_3.

הפונקציה <u>לא פתוחה</u> ו<u>לא סגורה</u> שכן $[4,5)$ סגוחה ב X אבל
$f_3([4,5))=[4,5)$ לא פתוחה ולא סגורה ב $\mathbb{R}$.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

תהי X קבוצה אינסופית. יהי x_0 איבר ב- X. נגדיר
$\tau=\{A\subseteq X: x_0\notin A\}\cup\{B\subseteq X: X\setminus B \text{ is finite}\}$.

א) הוכיחו ש- τ טופולוגיה על X.
ב) הראו שכל הנקודונים ב- X, פרט ל- $\{x_0\}$, הינם סגוחים. מה לגבי $\{x_0\}$?
ג) הראו: $cl(A)=\begin{cases} A & A \text{ is finite} \\ A\cup\{x_0\} & \text{otherwise}\end{cases}$.
ד) הראו: $int(A)=\begin{cases} A & X\setminus A \text{ is finite} \\ A\setminus\{x_0\} & \text{otherwise}\end{cases}$.

<u>פתרון</u>

א. נראה שמתקיימות 3 התכונות של טופולוגיה:

1) $\varnothing\in\tau$ שכן $x_0\notin\varnothing$. $X\in\tau$ שכן $X\setminus X=\varnothing$ סופית.

2) יהיו $O_1,O_2\in\tau$. יתכנו שני מקרים:

1. $x_0\notin O_1$ או $x_0\notin O_2$. במקרה זה $x_0\notin O_1\cap O_2$ ומכאן $O_1\cap O_2\in\tau$.

2. $X\setminus O_1, X\setminus O_2$ סופיות. במקרה זה נקבל ש $X\setminus(O_1\cap O_2)=X\setminus O_1\cup X\setminus O_2$
סופית כאיחוד סופי של סופיות וגם במקרה זה נקבל ש $O_1\cap O_2\in\tau$.

3) נניח שלכל $i\in I$ מתקיים $O_i\in\tau$. יתכנו שני מקרים:

1. לכל $i\in I$ $x_0\notin O_i$, במקרה זה נקבל $x_0\notin\bigcup_{i\in I}O_i$ ומכאן $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

2. קיים i_0 כך ש $X\setminus O_{i_0}$ סופית אבל במקרה זה נסיק ש- $X\setminus\bigcup_{i\in I}O_i\subseteq X\setminus O_{i_0}$ סופית.

לכן, גם במקרה זה $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

ב. תהי $x_1 \neq x_0$ נראה ש $\{x_1\}$ סגוחה.

$\{x_1\}$ פתוחה שכן $x_0 \notin \{x_1\}$.

$\{x_1\}$ סגורה- נוכיח זאת ע"י שנראה ש $X \setminus \{x_1\}$ פתוחה. מתקיים $X \setminus \left(X \setminus \{x_1\}\right) = \{x_1\}$ סופית ולכן $X \setminus \{x_1\}$ פתוחה.

נראה כעת ש- $\{x_0\}$ סגורה ואינה פתוחה.

סגורה- בדיוק כפי שמוכיחים ש- $\{x_1\}$ סגורה. $\{x_0\}$ אינה פתוחה שכן $x_0 \in \{x_0\}$ וכמו כן $X \setminus \{x_0\}$

אינסופית כי X אינסופית.

ג. נפרק לשני מקרים:

A סופית.

במקרה זה יש להראות כי $cl(A) = A$, ואנחנו נראה זאת ע"י כך שנראה כי A סגורה. ואכן, $A = X \setminus \left(X \setminus A\right)$ סופית, לכן $X \setminus A$ פתוחה ולכן A סגורה.

A אינסופית.

במקרה זה יש להראות כי $cl(A) = A \cup \{x_0\}$. נראה כי $A \cup \{x_0\}$ היא הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את A. תחילה נשים לב כי אם A אינסופית וכן $x_0 \notin A$, אזי A אינה סגורה. אכן, אם נניח בשלילה כי היא סגורה, נקבל ש- $X \setminus A$ פתוחה. אך $x_0 \in X \setminus A$ ולכן בהכרח מתקיים $X \setminus \left(X \setminus A\right)$ סופית. אבל אז נקבל ש- A סופית, בסתירה לנתון.

כעת, נראה כי $A \cup \{x_0\}$ סגורה. מתקיים $x_0 \notin X \setminus \left(A \cup \{x_0\}\right)$ ולכן $X \setminus \left(A \cup \{x_0\}\right)$ פתוחה, ולכן $A \cup \{x_0\}$ סגורה.

ד. גם כאן יש שני מקרים:

$X \setminus A$ סופית.

במקרה זה, A היא קבוצה פתוחה (לפי הגדרת הטופולוגיה) ולכן $int(A) = A$.

$X \setminus A$ אינסופית.

נראה $A\setminus\{x_0\}$ תת קבוצה פתוחה מקסימלית של A ומכאן $int(A)=A\setminus\{x_0\}$

פתוחה: $x_0\notin A\setminus\{x_0\}$ ולכן $A\setminus\{x_0\}$ פתוחה .

מקסימלית:

אם $A\setminus\{x_0\}=A$ אז המקסימליות ברורה.

אם $A\setminus\{x_0\}\neq A$ אז A לא פתוחה (שכן במקרה זה $x_0\in A$ וגם אנו תחת ההנחה ש $X\setminus A$ אינסופית.)

ומכאן $A\setminus\{x_0\}$ הפתוחה המקסימלית המוכלת ב- A .

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

יהי X מרחב טופולוגי, U קבוצה פתוחה וְ- A קבוצה צפופה.

הוכיחו $U\subseteq cl(A\cap U)$. הסיקו: $cl(U)=cl(A\bigcap U)$.

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה שקיים $u\in U$ ו $u\notin cl(A\cap U)$. אזי קיימת סביבה O של u כך ש $A\cap O\cap U=\varnothing$. כעת, U פתוחה ו- $u\in U$ ולכן גם U סביבה של u. לכן, $V:=U\cap O$ סביבה של u המקיימת $A\cap V=\varnothing$. בסתירה לכך ש A צפופה (אחד מהקריטריונים לצפיפות הוא: A צפופה אם ורק אם $A\cap W\neq\varnothing$ לכל W פתוחה ולא ריקה. אצלנו, V פתוחה ולא ריקה).

מכאן $U\subseteq cl(A\cap U)$.

<u>הוכחת המסקנה:</u> $A\cap U\subseteq U$ ומכאן $cl(A\cap U)\subseteq cl(U)$ נוכיח את ההכלה הפוכה ונקבל הדרוש.

$cl(A\cap U)$ סגורה המכילה את U ומכאן $cl(U)\subseteq cl(A\cap U)$. בסה"כ $cl(U)=cl(A\cap U)$.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו שבכל מרחב נורמי מתקיים $cl(B(a,r))=B[a,r]$. מצאו דוגמא נגדית עבור מרחב מטרי שאינו נורמי.

<u>פתרון</u>

נראה קודם דוגמא נגדית במרחב מטרי שאינו נורמי: נבחר $X=\{a,b\}$ עם המטריקה הדיסקרטית: $d(a,b)=1$. אזי נבחר את הכדור הפתוח $B(a,1)$ ומתקיים $B(a,1)=\{a\}$ ולכן סגור.

שימו לב: שסגור של קבוצה סגורה הוא הקבוצה עצמה ולכן $cl(B(a,1))=cl(\{a\})=\{a\}$ (כמו כן, יכולתם לראות שזה הסגור דרך הקריטריון של הסדרות). מאידך, $B[a,1]=\{a,b\}$.

כעת נוכיח את הטענה במרחב נורמי:

נוכיח הכלה דו כיוונית:

$cl(B(a,r))\subseteq B[a,r]$ - שימו לב שהכלה זו נכונה בכל מרחב מטרי, לאו דווקא מרחב נורמי. מתקיים $B(a,r)\subseteq B[a,r]$, הוכחתם ש-$B[a,r]$ היא קבוצה סגורה בכל מרחב מטרי ולכן $cl(B(a,r))\subseteq B[a,r]$.

$cl(B(a,r))\supseteq B[a,r]$- שימו לב שהכלה זו אינה נכונה בכל מרחב מטרי (ראו דוגמא נגדית) אך כן נכונה בכל מרחב נורמי. יהי $x\in B[a,r]$ ונראה שיש סדרה ב- $B(a,r)$ שמתכנסת אליו.

<u>מוטיבציה לבחירת הסדרה</u>: $x\in B[a,r]$ ולכן $\|x-a\|\le r$ ואז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)\right\|=\left(1-\frac{1}{n}\right)\|x-a\|<r$. ז"א, אנחנו מחפשים סדרה $\{y_n\}$ כך ש- $y_n-a=\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)$ ואז יהי מובטח ש-$y_n\in B(a,r)$. מהעברת אגפים נקבל את הסדרה:

$B(a,r)\supseteq\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)x+\frac{a}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{y_n\}$. מתקיים $y_n\to x$ שכן:

$$\|y_n-x\|=\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)\right\|=\left(\frac{1}{n}\right)\|x-a\|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\left(\left(\frac{1}{n}\right)\to 0,\|x-a\|\le r\right)$$

מש"ל

שאלה 5

א. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה בת מניה. הוכיחו ש- $\operatorname{int}(A)=\varnothing$.

ב. מצאו: $\operatorname{int}(\mathbb{Q}), cl(\mathbb{Q})$ (ב- $\mathbb{R}$).

ג. הוכיחו ש- $A:=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1=0\}$ סגורה ב $\mathbb{R}^n$ ו- $\operatorname{int}(A)=\varnothing$.

פתרון

א. נניח בשלילה שהפנים לא ריק. אזי קיימת $a\in\operatorname{int}(A)$. אזי קיים $\varepsilon>0$ כך ש $B(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subseteq A$. אך מתקיים $|A|\le\aleph_0$ ועם זאת $|(a-\varepsilon,a+\varepsilon)|=\aleph$ וזאת סתירה.

ב. $\operatorname{int}(\mathbb{Q})=\varnothing$ ברור מא'

$cl(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$: $cl(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{R}$ ברור. נותר להראות את ההכלה ההפוכה. אך ראיתם באינפי' כי לכל ממשי יש סדרת איברים רציונאליים המתכנסת אליו.

ג. תהי $p_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ההטלה על הרכיב הראשון. A סגורה שכן: $A=p_1^{-1}(\{0\})$.

נוכיח שהפנים ריק: תהי $a=(0,a_2,...,a_n)\in A$ ונראה ש- $a\notin\operatorname{int}(A)$. יש להראות שלכל $\varepsilon>0$ $B(a,\varepsilon)\not\subset A$. למשל: $\left(\frac{\varepsilon}{2},a_2,...,a_n\right)\in B(a,\varepsilon)\setminus A$.

מש"ל

שאלה 6

תהיינה τ_1,τ_2 טופולוגיות על X כך ש- $\tau_1\subseteq\tau_2$. הוכיחו:

א. F סגורה ב- (X,τ_1) $\Leftarrow$ F סגורה ב- (X,τ_2).

נסמן ב- $\operatorname{int}_{\tau_i}(A)$ את הפנים של A במרחב (X,τ_i) (כנ"ל עבור $cl_{\tau_i}(A)$).

ב. הוכיחו או הפריכו: $\operatorname{int}_{\tau_1}(A)\subseteq\operatorname{int}_{\tau_2}(A)$, $cl_{\tau_1}(A)\supseteq cl_{\tau_2}(A)$.

היעזרו (בין השאר) במה שהוכחתם על היחס בין הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ לבין הטופולוגיה של סורגנפריי וענו על הסעיף הבא:

ג. יהי $(\mathbb{R},T)$ הישר של סורגנפריי. מצאו פנים וסגור של הקבוצות הבאות $(0,1],(0,1),[0,1],[0,1)$.

פתרון

א. F סגורה ב-(X,T_1) ולכן $F^C \in T_1$ ולכן $F^C \in T_2$ ולכן F סגורה ב-(X,T_2).

ב. $\operatorname{int}_{T_1}(A) \subseteq \operatorname{int}_{T_2}(A)$: $\operatorname{int}_{T_1}(A) = \bigcup\limits_{T_1 \ni O \subseteq A} O \underset{T_1 \subseteq T_2}{\subseteq} \bigcup\limits_{T_2 \ni O \subseteq A} O$

$cl_{T_1}(A) \supseteq cl_{T_2}(A)$:

$cl_{T_2}(A) = \bigcap\limits_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in\,(X,T_2)}} F$ וגם $cl_{T_1}(A) = \bigcap\limits_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in\,(X,T_1)}} F$. כעת נשים לב שלפי א', אם $A \subseteq F$ וכן סגורה לפי T_1 אזי $A \subseteq F$ סגורה לפי T_2. לכן

$cl_{T_2}(A) = \bigcap\limits_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in\,(X,T_2)}} F \supseteq cl_{T_1}(A) = \bigcap\limits_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in\,(X,T_1)}} F$.

ג. שימו לב שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה הרגילה, ולכן כל קבוצה פתוחה לפי הרגילה, פתוחה לפי סורגנפריי; וכנ"ל לגבי קבוצה סגורה (לפי סעיף א).

$(0,1)$ פתוח לפי סורגנפריי ומתקיים $\operatorname{int}((0,1)) = (0,1)$. מה לגבי הסגור?

הקבוצה $(0,1)$ אינה סגורה, מכיוון שיש בה סדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 2}$ המתכנסת ל-0.

לכן $0 \in cl((0,1)) \setminus (0,1)$. מצד שני, $[0,1]$ סגור ולכן זו בהכרח הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את $(0,1)$ ומכאן $cl(0,1) = [0,1]$.

$[0,1]$: זו קבוצה סגורה בטופולוגיה הרגילה ולכן סגורה גם בסורגנפריי ולכן $cl[0,1] = [0,1]$. בנוסף, נשים לב כי זו קבוצה לא פתוחה: כי כל סביבה של 1 מכילה סביבה מהצורה $[1,\varepsilon)$ עבור $\varepsilon > 1$ כלשהו ולכן לא מוכלת בקבוצה. נמצא את הפנים: הפנים הוא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב-$[0,1]$ ולכן $\operatorname{int}[0,1] = [0,1)$.

$[0,1)$: סגוחה (בדקו!) ולכן $\operatorname{int}([0,1)) = cl([0,1)) = [0,1)$.

$(0,1]$: ניתן לראות (משני נימוקים קודמים) שהיא אינה פתוחה ואינה סגורה. הפתוחה המקסימלית שמוכלת בתוכה היא $(0,1)$ והסגורה המינימלית שמכילה אותה היא $[0,1]$ ולכן:

$cl((0,1]) = [0,1], \quad \operatorname{int}((0,1]) = (0,1)$.

מש"ל