הרצאה III- אינפי 1

לפני שנתחיל בשיעור נרצה לפתור תרגילים בסופרימום.

תרגיל 1: מצא את $A = \{r \in Q : 0 < r < 1\}$ .supA

פתרון: צריך לענות על שני הקריטריונים. 1ש גדול מכל האיברים בA, ושלכל אפסילון חיובי מתקיים $\forall\varepsilon > 0 \exists r \in Q: 1 - \varepsilon < r < 1$.

וזה ברור לפי מה שהוכחנו בהרצאה קודמת ואסיומת דדיקינד.

תרגיל 2: לכל מספר ממשי (b) חיובי קיים שורש. ז"א קיים a כך ש $a^2=b$.

פתרון: נסמן בE את הקבוצה $E = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 : \ x^2 \leq b\}$. נוכיח שקיים ל E סופרימום. קיים n טבעי כך שn>b.

ולכן מתקיים $n^2 \geq n > b$ ז"א שלכל x שגדול מn לא יהיה שייך לE. החסם מלעיל של E יהיה n. כעת נגדיר a:=supE.

לכל n חיובי קיים x כך שמתקיים $a - \frac{1}{n} < x \leq a$. ז"א ש$(a - \frac{1}{n})^2 \leq x^2 \leq b$, כי x שייך לE. ולכן $a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq b$. נעביר אגפים

ונקבל כי $a^2 - b < \frac{2a}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{2a}{n}$ (אגף שמאל לא יכול להיות שלילי..) לכן $0 < \frac{a^2-b}{2a} < \frac{1}{n}$ לכל n טבעי. סתירה! $a^2 - b \leq 0$ ז"א

שמתקיים $a^2 \leq b$. נניח בשלילה ש$a^2 < b$. נסמן כי $a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < a^2 + b - a^2$, ז"א ש$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < b$ בסתירה לכך שa

סופרימום. לכן בהכרח ש$a^2 = b$.

כעת נחזור לגבולות:

דוגמה 1: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

הוכחה: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\bar{n} : \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon, \forall n \geq \bar{n}: \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

דוגמה 2: q מספר בין 0 ל1. צ"ל: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

הוכחה: $\frac{1}{q} > 1 \to \frac{1}{q} = 1 + \alpha; \alpha > 0$ ועפ"י הבינום של ניוטון נקבל $\frac{1}{q^2} = 1 + \alpha n + \cdots + \alpha^1 > n\alpha$, וגם $0 < \frac{1}{q^n} < n\alpha$.

ולפי הגדרה: $\forall\varepsilon > 0 \exists\bar{n} : \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon\alpha$ לכל $\forall n \geq \bar{n}: \frac{1}{n} < \varepsilon\alpha$ נבצע פעולה ונקבל $\frac{1}{n\alpha} < \varepsilon$.

גבולות אינסופיים:

הגדרה: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ אם מתקיים $\forall E \in \mathbb{R} \exists\bar{n} \forall n \geq \bar{n}: x_n > E$.

הגדרה: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ אם מתקיים $\forall E \in \mathbb{R} \exists\bar{n} \forall n \geq \bar{n}: x_n < E$.

סביבות: (*neighborhood*)

$l \in R$ אפסילון סביבה: $U_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

$l=+\infty$ הסביבה: $U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$.

הגדרת הגבול לפי אפסילון סביבות:

תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $l \in \bar{\mathbb{R}}$ אומרים ש $l = \lim_{n\to\infty} x_n$ אם לכל ε סביבה קיים $\bar{n}: \forall n \geq \bar{n}: x_n \in U_\varepsilon(l)$.

סדרות מתכנסות וחסומות:

הגדרה: סדרה מתכנסת אם $l = \lim_{n\to\infty} x_n$ וגם $l \in \bar{\mathbb{R}}$.

הגדרה: סדרה חסומה אם קיים *M* אי שלילי כך שלכל *n* מתקיים $|x_n| \leq m$.

משפט: כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה: נניח כי סדרה מתכנסת לl. ז"א $l = \lim_{n\to\infty} x_n$. עבור $\varepsilon = 1$ מתקיים $\exists\bar{n}\forall n \geq \bar{n} : x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

ז"א $1 > |x_n - l| \geq \big||x_n| - |l|\big| \geq |x_n| - |l| \to |x_n| < |l| + 1$. נגדיר $M = max\{|x_1|, \ldots, |l| + 1\}$. ונקבל כי לכל *n* טבעי

מתקיים $|x_n| < m$. ולכן חסומה.

החל מהדוגמא:

דוגמא: הסדרה $x_n = (-1)^n$ חסומה ע"י 1. ז"א ש $\forall\varepsilon > 0\exists\bar{n}\forall n > \bar{n}: |(-1)^n - l| < \varepsilon$ n חיובי או שלילי לכן נקבל כי: או $1 + l < \varepsilon\ or\ 1 - l < \varepsilon$. ולא יתכן שכל אפסילון "יתפוס" את כל איברי הסדרה..

<u>פעולות אריתמטיות עם סדרות</u>:

אם גבול של סדרה הוא אפס נאמר שהסדרה קטנה אינפי.

משפט: יהיו $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות. אם α_n קטנה אינפי, וβ_n חסומה אזי $\lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n = 0$.

הוכחה: $x_n \leq M$: $\forall n$. אם M=0 אז ע"פ הגדרת הערך מוחלט כל איבר הוא אפס ולכן ברור שהגבול הוא אפס, סדרת המכפלה $\alpha_n\beta_n$ היא סדרה של אפסים בעצם. אם M חיובי: $\forall\varepsilon > 0\exists\bar{n}\forall n > \bar{n}: |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ לכן עבור n שגדול מה גג נקבל כי $|\alpha_n\beta_n| = |\alpha_n||\beta_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$. ולפי הגדרה קיבלנו את הדרוש. משל.

דוגמא: $x_n = \frac{\sin(n!)}{n} = \sin(n!)\frac{1}{n}$. הסינוס חסום ע"י 1, והאגף הימני של ה$\frac{1}{n}$ שואף לאפס. לכן גבול הסדרה הוא אפס. (ע"פ המשפט הקודם)

משפט: $x_n \to l \implies |x_n| \longrightarrow |l|$.

הוכחה: $\forall\varepsilon > 0\exists\bar{n}\forall n > \bar{n}: |x_n - l| < \varepsilon$ וע"פ הרצאה קודמת נקבל: $||x_n| - |l|| \leq |x_n - l| < \varepsilon$. וישירות ע"פ הגדרה נקבל כי $|x_n| \longrightarrow |l|$. משל.

הבהרה במשפט: $x_n \to +\infty \implies |x_n| \longrightarrow +\infty, x_n \to -\infty \implies |x_n| \longrightarrow \infty$.

משפט: $x_n \to l \implies x_n - l \to 0$

משפט: אם $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ אזי א) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n + \beta_n = 0$ ב) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n = 0$.

הוכחה:

א) $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$ וכעת $\forall\varepsilon > 0\exists\bar{n}_1\forall n > \bar{n}_1: |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ וגם $\forall\varepsilon > 0\exists\bar{n}_2\forall n > \bar{n}_2: |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ אז אם $\forall n \geq \bar{n} := \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$ מתקיים $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ וגם $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ואז $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon$. משל.

ב) אחת חסומה ואחת קטנה אינפי, אז ע"פ משפט הגבול של המכפלה הוא אפס.

משפט: יהיו $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות נניח $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$ כאשר a,b ממשיים. אזי:

1. $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = a + b$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$

הוכחה:

1. נסמן: $\alpha_n = x_n - a$ $\beta_n = y_n - b$ וע"פ משפט הגבול של שתי הסדרות החדשות שהגדרנו הוא אפס. $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n + \beta_n + a + b = a + b$.
2. $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n + a)(\beta_n + b) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n + \alpha_n b + \beta_n a + ab = ab$ ידוע שα_n, β_n קטנות אינפי, לכן המכפלה שלהם גם כן קטנה אינפי, ולכן הוכחה הטענה.
3. ע"פ משפט $|x_n| \to_{n\to\infty} |a|$ לכן $|x_n| \in (\frac{|a|}{2}, \frac{3|a|}{2})$ $\exists n_0: \forall n \geq n_0$. לכן $|x_n| > \frac{|a|}{2}$. ע"פ נוסחאות וזהויות שפיתחנו בהרצאות קודמות נקבל $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{|a||x_n|} \leq |x_n - a|\frac{1}{|a|}\frac{2}{|x_n|}$. נגדיר $\varepsilon_1 := \varepsilon\frac{|a|^2}{2}$. וע"פ הגדרה נקבל כי $\exists\bar{n}_1\forall n \geq \bar{n}_1: |x_n - a| < \varepsilon_1 = \varepsilon\frac{|a|^2}{2}$. נגדיר $\forall n \geq \bar{n} := \max(\bar{n}_1, \bar{n}_0)$ ונקבל כי $x_n > \frac{|a|}{2}$. וגם כי $|x_n - a| < \varepsilon\frac{|a|^2}{2}$ אז לכן $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon_1\frac{2}{|a|^2} = \varepsilon$ ולפי הגדרה $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$ משל.