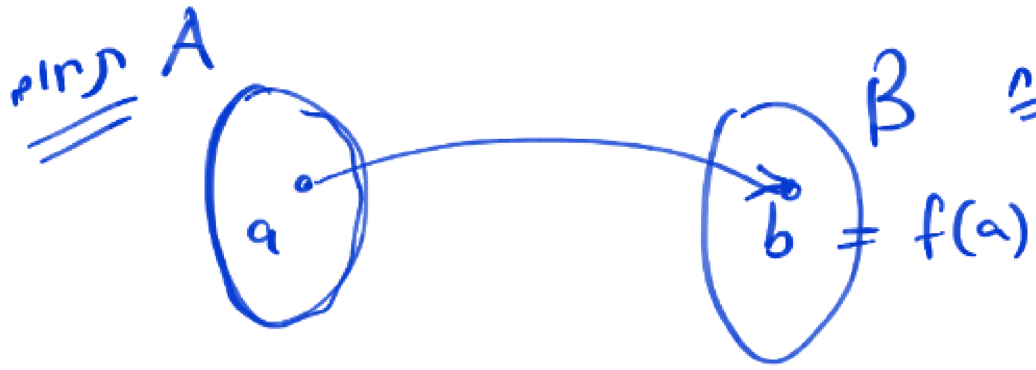
הרצאה 7

פונקציות

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות. פונקציה מ-A ל-B הינה תת-קבוצה f של $A \times B$ כך ש-

[לכל $a \in A$ קיים ויחיד $b \in B$ כך ש- $(a,b) \in f$.]

מסמנים: $f: A \longrightarrow B$.



(a,b)

אומרים כי A התחום (domain), B הטווח (range).

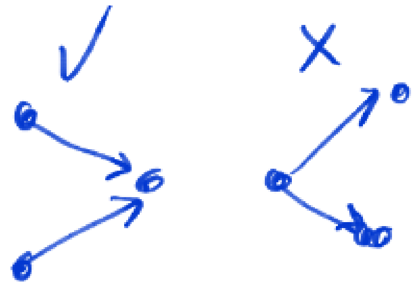
דוגמא:

$$A = \{1,2,3\}$$

$$B = \{a,b\}$$

① $\{(1,a),(2,b)\}$ לא מוגדרת על כל התחום

② $\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b)\}$ לא חד-ערכית



③ $\{(1,a),(2,a),(3,b)\}$ אכן פונקציה מוגדרת על כל התחום (שלמה!) וכן חד-ערכית

מוגדרות היטב

אומרים כי פונקציה 'אינה מוגדרת היטב' אם טוענו באחת מהתכונות שלה (אינה מוגדרת על כל התחום, אינה חד-ערכית).

זו אמירה פסאודו-מתמטית ולא מתמטית באמת.

מה צריך לוודא כדי שפונקציה $f: A \to B$ מוגדרת?

① לכל $x \in A$, $f(x)$ מוגדר.

② $f(x) \in B$

③ לא ייתכן כי $f(x)$ מקבל ערכים שונים לאותו $x \in A$.
(חד-ערכיות)

דוגמאות לטעויות נפוצות בהגדרת פונקציה:

① $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=1/x$

עקוה $0\in\mathbb{R}$, לא הגדרתי את $f(0)$.

② $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

כן פונקציה מוגדרת

עקוה:

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$f(i)$ כבר לא מוגדר.

③ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$

$f(x)=x$

$f(\sqrt{2}), f(\pi), \dots$ לא בטווח.

יש גם אי-רציונלי, אבל שאינו בטווח! f מתאימה את עצמו, כלומר.

④ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$f(n)=n/2$

$f(1)=1/2\notin\mathbb{N}$

לא בטווח.

בגיר מתקנה:

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ היא מוגדרת היטב.

⑤ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$f(x)=\sqrt{x}$

$\sqrt{-1} = i, -i$

$$\sqrt{r \operatorname{cis}\theta} = \sqrt{r}\operatorname{cis}\frac{\theta}{2},\ \sqrt{r}\operatorname{cis}\frac{\theta+2\pi}{2}$$

לא מוגדרת היטב מכיוון שאיננה חד-ערכית.

גם (למספרים חיוביים) יש שני שורשים, אך מתמודדים עם החד-ערכיות באמצעות הגדרה לשורש החיובי.

$$f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$ בממשיים

[אם כאן, ב-$\mathbb{C}$ לא ניתן למצוא פתרון דומה לבעיה, מכיוון שאין מושג של חיוביות.]

6) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = p$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{4}{6}\right) = 4$$

$$f\left(\frac{-2}{3}\right) = -2, \quad f\left(\frac{2}{-3}\right) = 2$$

לא חד ערכית.

[פתרון לבעיית הרב-ערכיות: להתייחס למספרים רציונליים רק בשבר מצומצם, כאשר המכנה חיובי.]

7) $A =$ אוסף תתי-הקבוצות של $\mathbb{N}$ שיש בהן שני איברים

[illegible]

$(\{1,5\} \in A$ [illegible]

$$f: A \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$f(\{a,b\}) = a$$

$$f(\{1,2\}) = 1$$
$$f(\{2,1\}) = 2$$

לא חד ערכית.

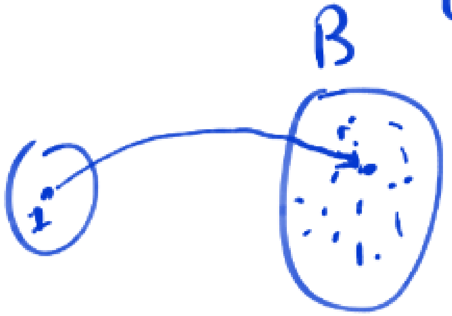
הערות:

- כמה פונקציות יש $f: A \to \{1\}$?

פונקציה אחת: $\{(a,1) \mid a \in A\}$

- כמה פונקציות יש $f: \{1\} \to B$?

לפי אברי B: $\{(1,b)\}$



$$f = \{(1,b)\}$$
$$g = \{(1,b')\}$$

- כמה פונקציות יש $f: A \to \emptyset$?

(אם $A \neq \emptyset$) אין פונקציה כזאת

כי $a \in A$, לא ניתן להתאים לו שום $b \in \emptyset$.

• כמה פונקציות יש $f:\emptyset\to B$?

״הפונקציה הריקה״, $\emptyset$

מהווה פונקציה מוגדרת היטב: $\emptyset\to B$.

כיוון, לכל איבר בתחום, יש איבר בטווח שמותאם לו באופן ריק!

• כמה פונקציות יש $f:\emptyset\to\emptyset$?

אחת: הפונקציה הריקה.

(הערה: מס׳ הפונקציות מ-A ל-B הוא $|B|^{|A|}$.
כרגע - חשבו על קב׳ סופיות, בהמשך נדון בקב׳ אינסופיות...)

תמונות ותמונות הפוכות

הגדרה: יהיו $f:A\to B$ פונקציה.

תהא $X\subseteq A$, נגדיר את קב׳ התמונה של X תחת f בתור:

$$f[X]:=\{f(x)\mid x\in X\}$$

זוהי תת-קב׳ של B.

דוגמה - $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$

$$f(x) = x^2$$

$$f[2\mathbb{Z}] = \{4x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

הוכחה בדו"כ: ($\subseteq$): יהי $y \in f[2\mathbb{Z}]$. לפי הגדרת קב' התמונה:

$y = f(x) = x^2$ כאשר, $x \in 2\mathbb{Z}$

ניתן לכתוב: $x = 2n$ כאשר $n \in \mathbb{Z}$.

ולכן: $y = (2n)^2 = 4n^2$.

($\supseteq$): $4x^2 = (2x)^2 = f(2x)$.

הערה: התמונה של f הינה $f[A]$.

כלומר, כל האברים בטווח שיש להם מקור.

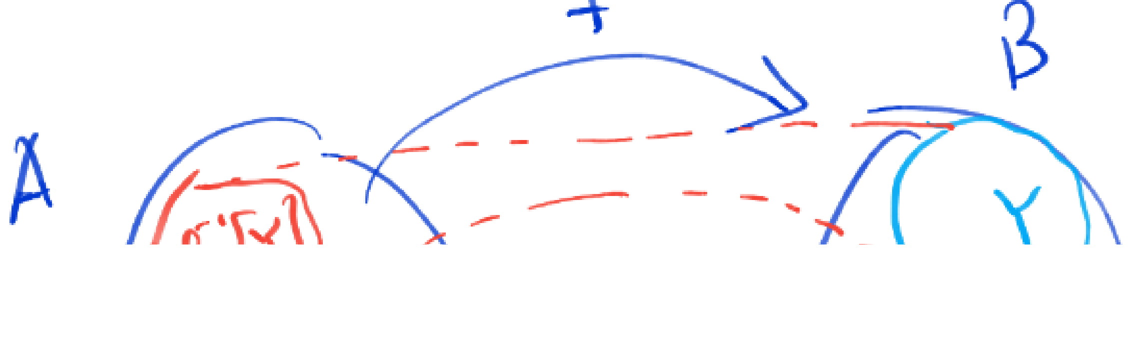
(מקור של אבר בטווח = אבר בתחום הנשלח אליו.)

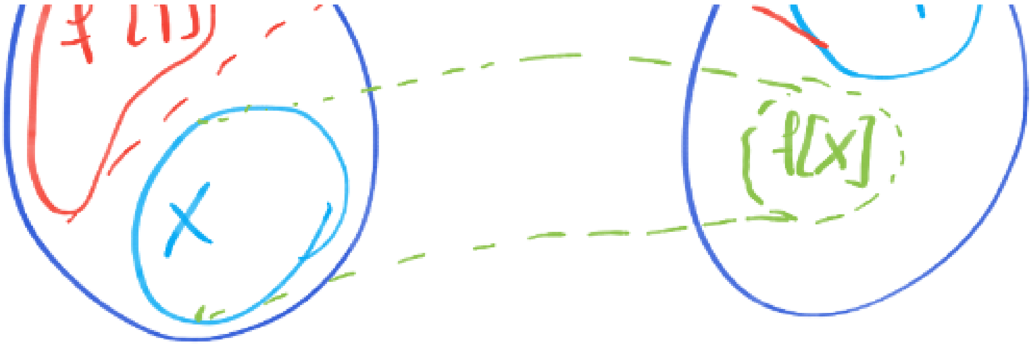
הגדרה: תהא $f: A \to B$ פונקציה.

תהא $Y \subseteq B$, נגדיר את התמונה ההפוכה של Y תחת f בתור:

$$f^{-1}[Y] := \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$$

זו: תת-קב' של התחום.





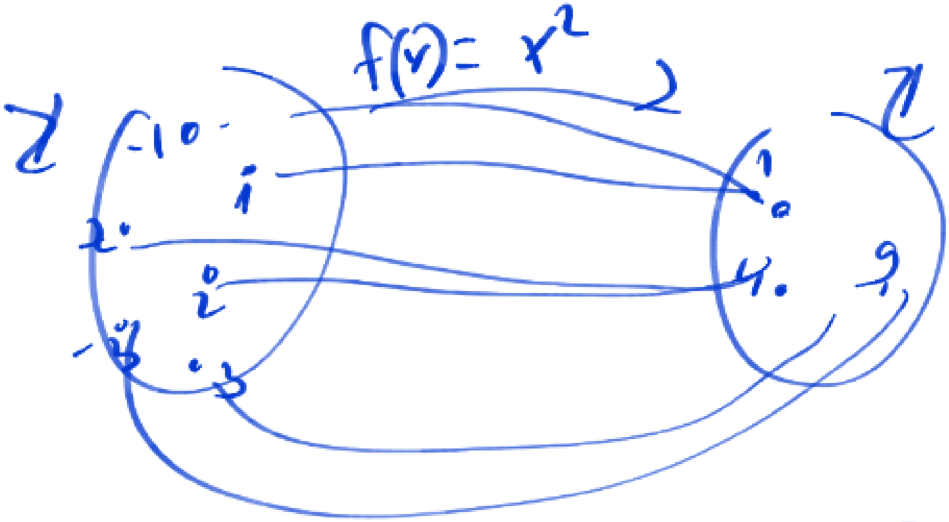
הערה: מתקיים:

$$x \in f^{-1}[Y] \iff f(x) \in Y$$

דוגמה - נתבונן ב- $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$

$$f(x)=x^2$$

$$f^{-1}[\{1,4,9\}] = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$$



התמונה של f:

$$f[\mathbb{Z}] = \{0,1,4,9,16,\dots\} = \{x^2 \mid x\in\mathbb{Z}\}$$

סימון: מסמנים את התמונה של פונקציה כך:

$$\mathrm{Im}\, f = f[A]$$

(Image)

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x^2$

המשך הדוגמה –

$f^{-1}[\{7\}]=\phi$ $\quad$ $(f[\{7\}]=\{49\})$

$f^{-1}[\{0,7\}]=\{0\}$

נזכיר:

$$f[X]\subseteq B,\quad f^{-1}[Y]\subseteq A$$

הגדרות: תהי $f:A\to B$ פונקציה. נאמר כי f:

onto
surjective

(1) על B אם $\underline{\mathrm{Im}\, f = B}$

כלומר, לכל $b\in B$ יש $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$.

into
injective

(2) חד-חד ערכית (חח"ע) אם לכל $x_1,x_2\in A$:

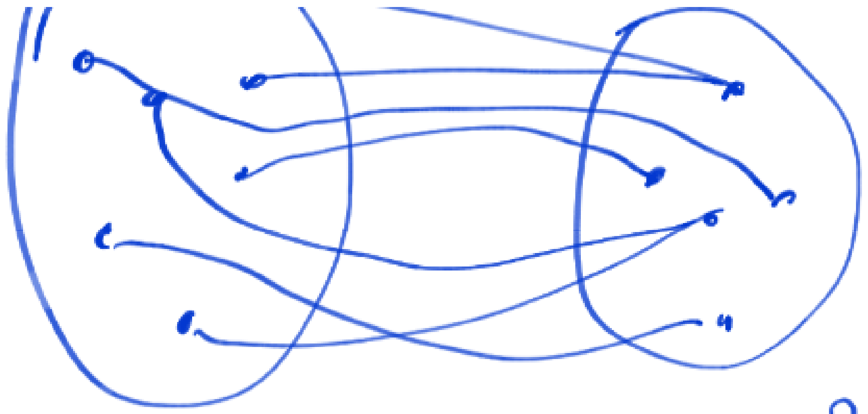
$$\underline{f(x_1)=f(x_2)\implies x_1=x_2}$$

שימו לב: חד ערכיות פירושה:

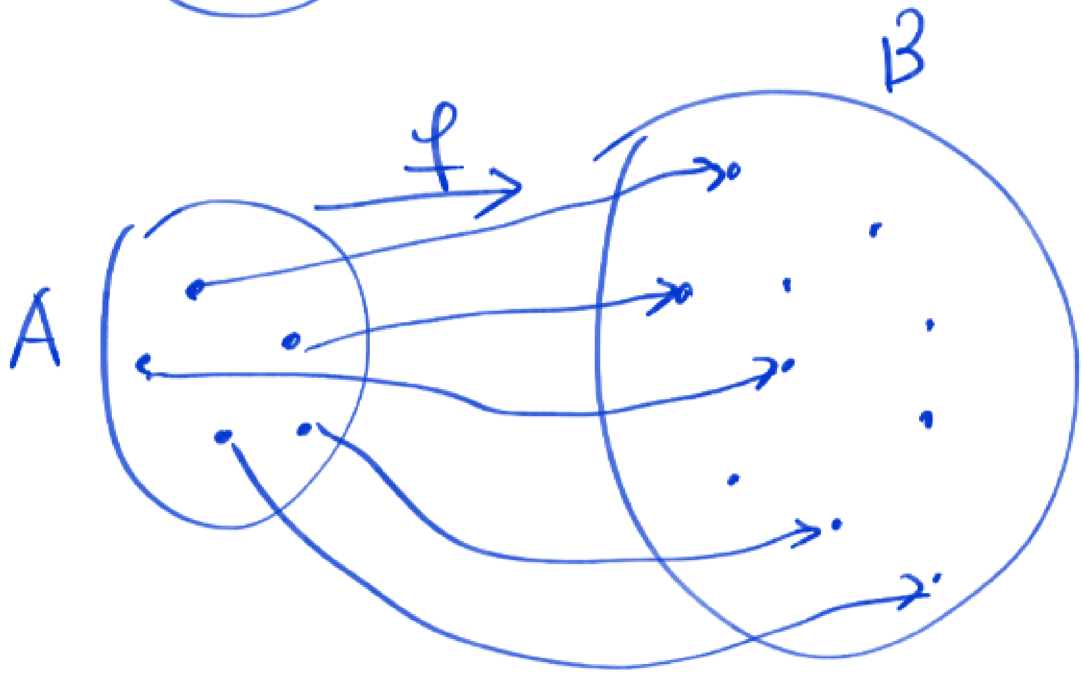
$$\left(f(x_1)=f(x_2)\impliedby x_1=x_2\right)$$

אילוסטרציה:

$$A\xrightarrow{f}B$$



על



חח"ע

דוגמאות:

① $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$

$f(x)=x^2$

- לא חח"ע $f(-1)=f(1)$

- לא על: $2\in\mathbb{Z}\setminus \mathrm{Im}\,f$

טווח

② $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=x^2$

- לא חח"ע כי $f(-1)=f(1)$

- לא על: $-1\notin \mathrm{Im}\,f$

$$\mathrm{Im}\,f = \{b\in\mathbb{R} \mid \exists a\in\mathbb{R}: f(a)=b\}$$

③ תהיה A קב'. נגדיר את פונקציית הזהות:

$$I_A : A \longrightarrow A$$
$$I_A(a) = a$$

- חח"ע
- על

$$\left(\begin{array}{ccc} I_A(a) & = & I_A(b) \\ \parallel & & \parallel \\ a & & b \end{array} \right)$$

④ העתקת ההכלה: $A \subseteq B$ קבוצות. נגדיר את פונקציית

$$i_A : A \longrightarrow B$$
$$i_A(a) = a$$

$A \subseteq B$ ולכן כל איבר של A הוא גם איבר של B,
ולכן זה מוגדר היטב.

- חח"ע (כמו קודם)
- על - לא תמיד
על $\Longleftrightarrow A = B$.

⑤ $$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$f(n) = 2n$$

- חח"ע: $2n = f(n) = f(m) = 2m \Longrightarrow n = m$
- לא על: $1 \in \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{טבעי}} \setminus \mathrm{Im}\, f$.

$$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N} \qquad ⑥$$

$$\left(f(n)=\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right) \qquad f(n)=\begin{cases} m & ,\ n=2m \\ m & ,\ n=2m-1 \end{cases}$$

דוגמה הנ"ל: f מש' תואם זוגי או אי-זוגי, והזוגי
בתור $2m$ או $2m-1$ (בהתאמה) יחיד.

- חח"ע: לא – $f(4)=2=f(3)$, $3\neq 4$.
- על: יהי $m\in\mathbb{N}$. אזי $f(2m)=m$
  ולכן $m\in \operatorname{Im} f$.

11^{00}

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \qquad ⑦$$
$$f(x)=e^x$$

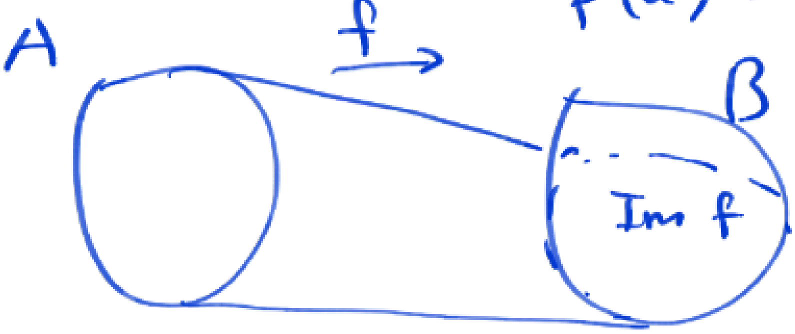
- חח"ע $e^x=e^y \Longrightarrow x=y$
- לא על,

$$\operatorname{Im} f=\mathbb{R}_{>0}$$
$$\left(f(\log r)=r\right)$$

הערה: אם $f:A\to B$ פונקציה ניתן להגביל

ב- $\tilde{f}: A \to f[A]$ המוגדרת לפי:

$$\tilde{f}(a) = f(a)$$



$\tilde{f}$ פונקציה על, כלומר, כל פונקציה היא על התמונה שלה.

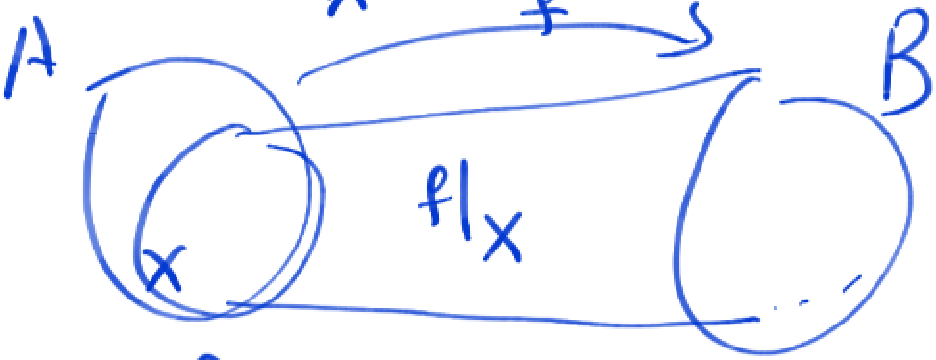
הערה נוספת (צמצום):

תהא פונקציה $f: A \to B$

יהי X תת-קב' של A. נגדיר את הצמצום של f ל- X לפי:

$$f|_X : X \to B$$

$$f|_X(x) = f(x)$$



הערה - אם f חח"ע אז כל צמצום שלה הוא גם חח"ע.

הערה - נניח $X \subseteq A$ נסמן הצמצום $f|_X$.

אזי: $\forall x_1,x_2 \in X: \quad f|_X(x_1) = f|_X(x_2)$

לפי הגדרת הצמצום $\rightarrow$ $\quad f(x_1) \quad\quad f(x_2)$

מכיוון ש-f חח"ע, נובע כי $x_1 = x_2$, ולכן $f|_X$ חח"ע.

מ.ש.ל.

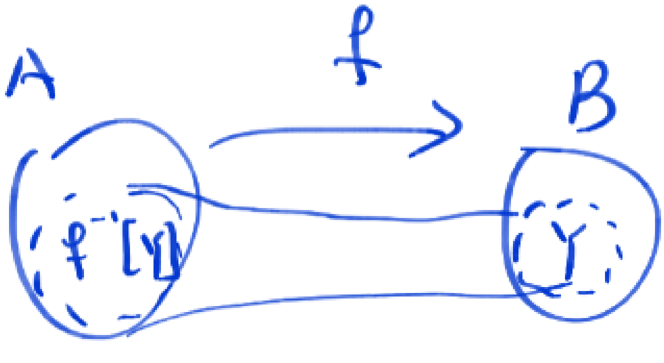
ממשיכים עם דוגמאות...

8) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $(|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2})$

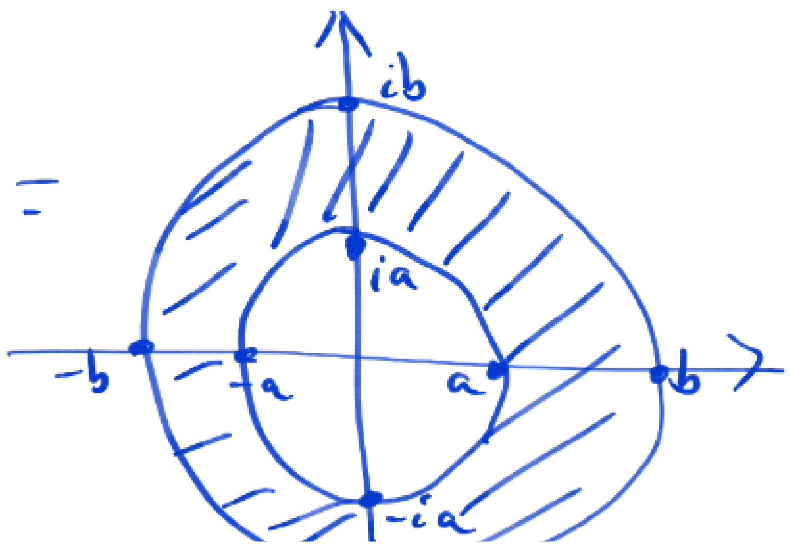
$f(z) = |z|$

- התמונה: $\mathbb{R}_{\geq 0}$
- לא חח"ע.
- $f^{-1}[[a,b]] \overset{?}{=}$ $\quad (a>0)$

$[a,b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$



$f^{-1}[[a,b]] =$



$$f^{-1}[[a,b]]=\{z\in\mathbb{C} \mid a\le|z|\le b\}=\{x+iy \mid a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$$

- מיהו הצמצום של f ל- $\mathbb{R}$?

$$f|_{\mathbb{R}}(r)=|r|=\begin{cases} r & ,r\ge 0\\ -r & ,r<0\end{cases}$$

פונק' הערך המוחלט של הממשיים המוכרת לנו.

9. $f:\mathbb{R}\to(0,1)$

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

(מוצג היום: לגבי...)

- חח"ע:

$$f(x)=f(y)\Rightarrow \frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^y}{e^y+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{x+y}}+e^x=\cancel{e^{x+y}}+e^y\Rightarrow e^x=e^y\Rightarrow x=y$$

ח.ח.ע. $\ln$
למס' ח.ח.ע.

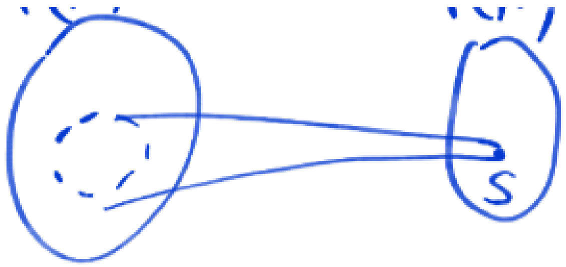
- על: יהי $y\in(0,1)$. ניקח כי:

$$x=\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

היינו מקור:

$$f(x)=f\left(\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)\right)=\frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{y}{1-y}+1}=y$$

$P(A)$ $\quad$ $P(\mathbb{N})$



$$f: P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N}) \quad (10)$$
$$f(S) = S \cup \{1\}$$

- תמונה: $\text{Im} f = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid 1 \in S\}$

הוכחה - $(\subseteq)$: יהי $S \in \text{Im} f$, אזי $S = f(T)$
כאשר $T \subseteq \mathbb{N}$. ואכן,

$$S = f(T) = T \cup \{1\}$$

ולכן $1 \in S$, כלומר S כנדרש.

$(\supseteq)$: אם $1 \in S \subseteq \mathbb{N}$, אז
$$f(S) = S \cup \{1\} = S$$
כלומר $S \in \text{Im} f$.

- חח"ע - לא: $f(\{2\}) = f(\{1,2\})$

- תמונה הפוכה:

$$f^{-1}[\{S\}] = \{T \subseteq \mathbb{N} \mid f(T) = S\} =$$
$$= \{T \subseteq \mathbb{N} \mid T \cup \{1\} = S\}$$

- אם $1 \notin S$ $\Leftarrow$ $f^{-1}[\{S\}] = \emptyset$.

- אם $1 \in S$ $\Leftarrow$

$. \ne L\{S\}] = \{S, S\setminus\{1\}\}$

<u>טענה:</u> יהיו A,B קבוצות סופיות.

יהי $f: A \to B$ פונקציה.

(1) אם f <u>חח"ע</u> אז $|A| \le |B|$.

(2) אם f <u>על</u> אז $|B| \le |A|$.

<u>הוכחה:</u>

(1) באינדוקציה: (על $|A|$).

$|A|=0$: ברור. $0 \le |B|$.

$|A|=1$: $f: A \to B$ פונקציה, $A \ne \emptyset$ ולכן קיים $a \in A$, ולכן $f(a) \in B$ ולכן $|B| \ge 1$.

צעד האינדוקציה - $|A| = n+1$.

יהי $a \in A$ כלשהו. אזי: $|A\setminus\{a\}| = n$.

נתבונן בצמצום:

$$f|_{A\setminus\{a\}} : A\setminus\{a\} \longrightarrow B$$

נתבונן בפונקציה:

$$\tilde{f} : A\setminus\{a\} \longrightarrow \mathrm{Im}\left(f|_{A\setminus\{a\}}\right)$$

$$\tilde{f}(x) = f(x)$$

f חח"ע ולכן גם הצמצום חח"ע ולכן f חח"ע

$$\left(\tilde{f}(x)=\tilde{f}(y) \xRightarrow[x,y\in A\setminus\{a\}]{\text{הגדרת } \tilde{f}} f(x)=f(y) \xRightarrow[f \text{ חח"ע}]{} x=y\right)$$

ולכן מהנחת האינדוקציה:

$$(*)\quad \begin{cases} \left|\mathrm{Im}\left(f|_{A\setminus\{a\}}\right)\right| \geq |A\setminus\{a\}| = n \\ \qquad \| \\ \left|f[A\setminus\{a\}]\right| \end{cases}$$

שימו לב כי:

$$\left(\mathrm{Im}(f|_X) = f[X]\right.$$

כי הרי

$$\left. f|_X : X \to B \right)$$

נבחין $\to f[A]$. לכן כי $|f[A]| \geq n+1$

מדוע?

$$f[A] = f[A\setminus\{a\}] \,\dot{\cup}\, \{f(a)\}$$

איחוד זר:
איחוד של קבוצות
זרות

מדוע זהו איחוד זר? נניח בשלילה:

$$f(a) \in f[A\setminus\{a\}] \Longrightarrow \exists a' \in A\setminus\{a\} :$$

$f(a')=f(a)$

$f(a') = f(a)$ כי f חח"ע

$\Rightarrow a = a' \Rightarrow$ סתירה לכך ש- $a' \in A\setminus\{a\}$

$$|f[A]| = \underbrace{|f[A\setminus\{a\}]|}_{\text{לפי (*) זה } \geq n} + \underbrace{|\{f(a)\}|}_{1}$$

ולכן: $|f[A]| \geq n+1$ כנדרש.

(1) מ.ש.ל.

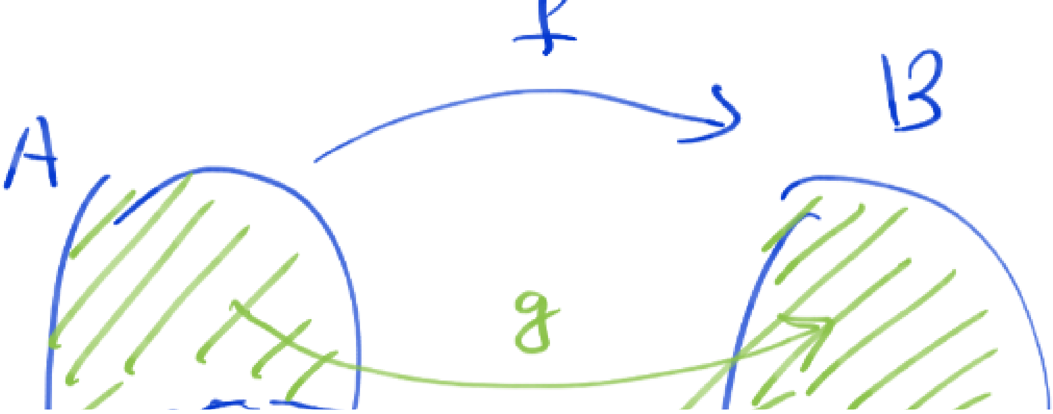
(2) $f: A \to B$ על, הוכיחו: $|B| \leq |A|$.

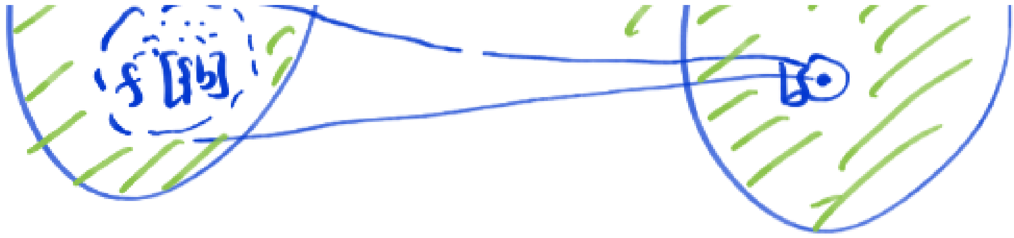
<u>הוכחה</u> – באינדוקציה: (על $|B|$).

$|B| = 0 \Leftarrow$ ברור, $|A| \geq 0$.

$|B| = n+1$: נבחר $b \in B$ כלשהו. נשתמש ב-

$$g: A\setminus f^{-1}[\{b\}] \longrightarrow B\setminus\{b\}$$





g מוגדרת לפי: $g(a) := f(a)$.

נשים לב כי היא מוגדרת היטב: אם $f(a)=b$ אז $a \in f^{-1}[\{b\}]$, וזה לא ייתכן, ולכן לכל $a \in A\setminus f^{-1}[\{b\}]$ מתקיים:

$$g(a) = f(a) \in B\setminus\{b\}.$$

נראה כי g על $B\setminus\{b\}$.

אכן, יהי $c \in B\setminus\{b\}$. מכיוון ש-f על, יש $\underline{a \in A}$ כך ש- $f(a)=c$.

נשים לב כי $a \in A\setminus f^{-1}[\{b\}]$, כי אחרת:

$$a \in f^{-1}[\{b\}] \Rightarrow c = f(a) = b$$

בסתירה לכך ש- $c \in B\setminus\{b\}$.

ולכן: $g(a) = f(a) = c$.

כלומר, g על.

$g: A\setminus f^{-1}[\{b\}] \to B\setminus\{b\}$ על,

מגודל n

לכן לפי הנחת האינדוקציה,

$$(*)\quad \left|A \setminus f^{-1}[\{b\}]\right| \geq \left|B \setminus \{b\}\right| = n$$

כעת:

$$A = \left(A \setminus f^{-1}[\{b\}]\right) \uplus f^{-1}[\{b\}]$$

האיחוד זר

לכן:

$$|A| = \underbrace{\left|A \setminus f^{-1}[\{b\}]\right|}_{\overset{(*)}{\geq}\, n} + \underbrace{\left|f^{-1}[\{b\}]\right|}_{\geq\, 1}$$

מכיוון ש-f על, קיים a (לפחות אחד) כך ש-
$f(a)=b$

ובפרט:

$$a \in f^{-1}[\{b\}]$$

ולכן $\left|f^{-1}[\{b\}]\right| \geq 1$.

לסיכום, $|A| \geq n+1$

כנדרש.

מ.ש.1.ו ②

הגדרה: תהא $f:A\to B$ פונקציה.

פונקציית התמונה $\underline{f[\,] : P(A) \to P(B)}$

$$f[X] := \{b\in B \mid \exists a\in X : f(a)=b\}$$

פונקציית התמונה ההפוכה $\underline{f^{-1}[\,] : P(B) \to P(A)}$

$$f^{-1}[Y] := \{a\in A \mid f(a)\in Y\}$$

טענה: ① $\underset{A\to B}{f}$ חח"ע $\iff$ $\underset{P(A)\to P(B)}{f[\,]}$ חח"ע.

② f על $\iff$ $f[\,]$ על.

הוכחה: ① ($\Leftarrow$) נניח ש-f חח"ע ונוכיח כי $f[\,]$ חח"ע.

תהיינה $X,Y\in P(A)$ (כלומר $X,Y\subseteq A$). צ"ל:

$$f[X]=f[Y] \Longrightarrow X=Y.$$

ידוע:

$$f[X] = \{f(a)\mid a\in X\} = \{f(a')\mid a'\in Y\} = f[Y]$$

נוכיח $X=Y$ ע"י הכלה דו'.

$X\subseteq Y$: יהי $a\in X$ ...

$$f(a)\in f[X]=f[Y]=\{f(a')\mid a'\in Y\}$$

לכן קיים $a'\in Y$ כך ש- $f(a)=f(a')$

אבל f חח"ע ולכן: $a=a'$ כלומר $a\in Y$.

הראינו $X\subseteq Y$.

הכלה: הכיוון ההפוך: דומה לגמרי.

($\Longrightarrow$) נניח $f[\,]$ חח"ע ונוכיח f חח"ע.

יהיו $x,y\in A$, נניח $f(x)=f(y)$ וצ"ל $x=y$.

נתבונן ב- $\{x\},\{y\}\in P(A)$.

מתקיים:

$$f[\{x\}]=\{f(x)\}\underset{f(x)=f(y)}{=}\{f(y)\}=f[\{y\}]$$

מכך ש- $f[\,]$ חח"ע נקבל $\{x\}=\{y\}$,

ולכן $x=y$.

מ.ש.ל. (1)

(2) רוצים להראות f על $\Longleftrightarrow$ $f[\,]$ על.

($\Longleftarrow$): נניח f על ונוכיח $f[\,]$ על.

$f[\,]: P(A)\to P(B)$ על: לכל $Y\in P(B)$ קיים $X\in P(A)$ כך ש- $f[X]=Y$.

יהי $Y\subseteq B$. נגדיר -

$$X = f^{-1}[Y] = \{a\in A \mid f(a)\in Y\}$$

נוכיח כי $f[X]=Y$. הכלה דו"כ:

$f[X]\subseteq Y$: יהי $b\in f[X]$, אזי קיים $x\in X$: $b=f(x)$

לפי הגדרת X, $b=f(x)\in Y$.

$Y\subseteq f[X]$: f על לכן לכל $y\in Y$ יש $x\in A$: $f(x)=y$.

נקבל כי $x\in f^{-1}[Y]=X$

לכן לכל $y\in Y$ יש $x\in X$: $f(x)=y$ כלומר $y\in f[X]$

סה"כ: $Y\subseteq f[X]$ ולכן שוויון.

$(\Longrightarrow)$ נניח $f[\,]$ על ונוכיח כי f על.

צ"ל: לכל $b\in B$ קיים $a\in A$: $f(a)=b$.

נתון ב- $\{b\}$. מכיוון ש- $f[\,]$ על, קיים קב׳ $X\in P(A)$ כך ש- $f[X]=\{b\}$.

נשים לב כי $X\neq\emptyset$. (כי $f[\emptyset]=\emptyset$.)

בפרט, ניתן לקחת $x\in X$ כלשהו, ומתקיים:

$$f(x)\in\{b\}$$

כ״ל

$f(y)=b$ כנדרש.

מ.ש.ל. (2)

<u>טענה:</u> לכל פונקציה $f:A\to B$ מתקיים:

(1) $f[f^{-1}[Y]]\subseteq Y$: $\forall Y\subseteq B$

(2) $f^{-1}[f[X]]\supseteq X$: $\forall X\subseteq A$

<u>הוכחה:</u>

(1) יהי $b\in f[f^{-1}[Y]]$. אזי קיים $a\in f^{-1}[Y]$ כך ש- $b=f(a)$.

אבל מכך ש- $a\in f^{-1}[Y]$ נובע כי $f(a)\in Y$.

אבל $b=f(a)\in Y$ לכן $b\in Y$.

(2) יהי $x\in X$. אזי $f(x)\in f[X]$

לכן הגדרת פונק״ת התמונה (ההפוכה) הלא

מהגדרת התמונה ההפוכה:

$x \in f^{-1}[f[X]]$.

מ.ש.ל.

<u>הערה:</u> לא תמיד יש שוויון בטענה לעיל:

(1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$f(n)=2n$

אז:

$$f[f^{-1}[\{1\}]] = f[\emptyset] = \emptyset$$

(2) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$

$f(n)=|n|$

$$f^{-1}[f[\{1,2\}]] = \{-2,-1,1,2\}$$

מתי כן יתקיים שוויון?

ב-(1), אם f על;

ב-(2), אם f חח"ע.

<u>סימון:</u> את אוסף הפונקציות מ-A ל-B מסמנים:

$$B^A$$

דוגמה:

פונקציות:

$$\{0,1\}^{\{x,y,z\}} = \{f:\{x,y,z\}\to\{0,1\}\}$$

$2^3=8$ פונקציות.

[illegible]
רמז: כנ״ל, דומה סינוני

טענה: יש פונקציה חח״ע ועל:

$$F: P(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$$

הוכחה: נגדיר F ונוכיח כי F חח״ע ועל:

$$F: P(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$$

$$F(X) = f_X$$

כאשר

$$f_X : A \longrightarrow \{0,1\}$$

נתונה ע״פ:

$$f_X(a) = \begin{cases} 1 & , a \in X \\ 0 & , a \notin X \end{cases}$$

(נקרא גם "האינדיקטור" של X.)

מדוע F חח"ע ועל!

F חח"ע. נניח $F(X)=F(Y)$, אזי:

$f_X = f_Y$.

נוכיח $X=Y$. מתקיים:

$$a\in X \underset{\text{מהגדרת } f_X}{\iff} f_X(a)=1 \underset{f_X=f_Y}{\iff} f_Y(a)=1 \underset{\text{מהגדרת } f_Y}{\iff} a\in Y$$

לכן $X=Y$.

F על. תהי $f\in\{0,1\}^A$, כלומר $f:A\to\{0,1\}$

נוכיח כי קיימת תמ"ק $X\subseteq A$ כך ש- $F(X)=f$.

נגדיר:

$$X=\{a\in A \mid f(a)=1\}$$

$$\left(=f^{-1}[\{1\}]\right)$$

לכן מתקיים:

$$F(X)=f_X$$

נוכיח: $f_X=f$. יהי $a\in A$. אזי:

$$f_X(a)=1 \iff a\in X \iff f(a)=1$$

מהגד׳ $\hat{X}$

מכאן, $f_X = f$ כי לכל $a\in A$,

$f_X(a)=f(a)$.

כלומר, הראינו: $F(X)=f$ ולכן F על.

מ.ש.ל.

התאמה חח״ע ועל: