10/07/19

88-235 אנליזת פורייה – מבחן לדוגמא

מרצה: דר' ארז שיינר משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 28 נק' ענו על כל השאלות כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. נסמן את טור הפורייה של $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ב $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$

א. מצאו את המקדמים a_n, b_n.

כיוון שהפונקציה זוגית

$$b_n = 0$$

כעת נחשב את שאר המקדמים

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,dx = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$$

(כמובן שמבחן צריך לפרט את חישוב האינטגרל).

ב. חשבו את הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{1-4n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{1-4n^2}$.

הפונקציה רציפה לכן ההמשך המחזורי רציף למקוטעין, הנגזרת רציפה ולכן הנגזרת החד צדדיות קיימות וסופיות ולכן לפי משפט דיריכלה, טור הפורייה מתכנס לממוצע של הגבולות החד צדדים.

כיוון שהערכים בקצוות שווים, גם ההמשך המחזורי רציף, ולכן טור הפורייה מתכנס להמשך המחזורי בכל נקודה בממשיים.

בקטע $[-\pi,\pi]$ מתקיים

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\cos(nx)$$

נציב $x=0$

$$1-\frac{2}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$$

נכפול בπ ונקבל כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{1-4n^2} = \pi-2$$

נציב $x=\pi$

$$-\frac{2}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

נכפול בפאי ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{1-4n^2}=-2$$

2. תהי $f\in E$, ונסמן את מקדמי הפורייה שלה ב a_n, b_n . נגדיר את הפונקציות

$$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2} \qquad , g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

א. הוכיחו כי טור הפורייה של $g(x)$ הוא $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$

וטור הפורייה של $h(x)$ הוא $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$

ראשית נתון

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=\begin{Bmatrix} t=-x\\ dt=-dx\end{Bmatrix}=\frac{-1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}f(-t)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-x)\cos(nx)\,dx$$

כיוון שg זוגית, המקדמים של סינוס מתבטלים נחשב את מקדמי הקוסינוס.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\cos(nx)\,dx=\frac{a_n+a_n}{2}=a_n$$

כעת עבור b_n

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx=\begin{Bmatrix} t=-x\\ dt=-dx\end{Bmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}f(-t)\sin(nt)\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-x)\sin(nx)\,dx$$

כיוון שh אי זוגית המקדמים של קוסינוס מתאפסים, נחשב את מקדמי הסינוס

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)-f(-x)}{2}\sin(nx)\,dx=\frac{b_n+b_n}{2}=b_n$$

מ.ש.ל.

ב. נתון בנוסף כי $f(x)=e^x$, חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$.

כמובן ש$h\in E$ נפעיל את שיוויון פרסבל ונקבל

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$$

כי שאר המקדמים הם אפס.

כלומר, צ"ל את

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(e^{2x}-2+e^{-2x})dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{2x}}{2}-2x-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{2\pi}}{2}-2\pi-\frac{e^{-2\pi}}{2}\right]$$

סתם בדיקה לסעיף האחרון:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx)\, dx = \frac{(-1)^{n+1} 2n \sinh(\pi)}{\pi(n^2+1)} = \left(\frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2}\right) \cdot \frac{(-1)^{n+1} 2n}{\pi(n^2+1)}$$

ואכן כאשר סוכמים אותם בריבוע מקבלים את מה שקיבלנו.

3.

א. תהי $f \in E$ כך ש f, f' רציפות, f'' רציפה למקוטעין ו $f(\pi) = f(-\pi)$.

נסמן את מקדמי הפורייה של f ב a_n, b_n.

הוכיחו כי $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n$.

כיוון ש'f רציפה, ו$f(\pi) = f(-\pi)$ אזי

$$f' \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)$$

כיוון שf'' רציפה למקוטעין, הנגזרת החד צדדיות של f' קיימות וסופיות.

כיוון שf' רציפה אזי ההמשך המחזורי שלה רציף באפס. ולכן לפי דיריכה טור הפורייה שלה מתכנס אליה באפס, ולכן מותר להציב אפס.

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n$$

ב. נתון כי טור הפורייה של הפונקציה $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ הוא $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$.

חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

קל לוודא שהפונקציה מקיימת את כל התנאים של סעיף א'. ולכן

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{12(-1)^n}{n^3}$$

לכן

$$-\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

4. תהי $f\in G$ רציפה ונגזרתה רציפה למקוטעין כך שגם התמרת הפורייה שלה F מקיימת $F\in G$.

א. הביעו את התמרת הפורייה של F באמצעות f.

$$\mathcal{F}[F](s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-isx}dx$$

כיוון ש$f\in G$ והנגזרות החד צדדיות קיימות וסופיות, וכיוון ש$F\in G$ לפי משפט ההתמרה ההפוכה

$$f(-x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f(-x)](t)e^{itx}dt=\int_{-\infty}^{\infty}F(-t)e^{itx}dt=$$

כעת נחזור להתמרת ההתמרה

$$\mathcal{F}[F](s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-isx}dx=\begin{Bmatrix}t=-x\\dt=-dx\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(-t)e^{ist}dt$$

ננסה להבין מי היא $F(-t)$

$$F(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{(-isx)}dx$$

$$F(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{itx}dx=\begin{Bmatrix}x=-u\\dx=-du\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(-u)e^{-itu}du=\mathcal{F}[f(-x)](t)$$

ולכן

$$\mathcal{F}[F](s)=\frac{f(-s)}{2\pi}$$

ב. נזכור כי התמרת הפורייה של $f=e^{-|x|}$ היא $F(s)=\dfrac{1}{\pi\left(1+s^2\right)}$

חשבו את התמרת הפורייה של $\dfrac{1}{1+x^2}$.

קל לוודא שהפונקציה מקיימת את תנאי הסעיף הקודם.

$$\mathcal{F}[F](s)=\frac{f(-s)}{2\pi}$$

לכן

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi(1+x^2)}\right](s)=\frac{e^{-|s|}}{2\pi}$$

נוציא את פאי החוצה ונצמצם

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](s)=\frac{e^{-|s|}}{2}$$