פתרון לבוחן

1) יהי $a_n=\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}\right)\cdots\left(\sqrt{3}-\sqrt[n]{3}\right)$. $\sqrt[n+1]{3}>1$ $\forall n$ ולכן הסדרה מונוטונית יורדת שכן $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{3}-\sqrt[n+1]{3}<\sqrt{4}-1=2-1=1$.מדובר בסדרה של חיוביים ולכן היא חסומה מלרע ע"י אפס ומכאן $\exists\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L\in\mathbb{R}$ (הגבול הוא החסם התחתון של הסדרה).

מתקיים $a_{n+1}=a_n\left(\sqrt{3}-\sqrt[n+1]{3}\right)$ ולכן מאריתמטיקה של גבולות $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}-\sqrt[n+1]{3}\right)$. נקבל $L=L(\sqrt{3}-1)$ שכן $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{3}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$ ומכאן $L=0$.

2) א) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}$ הוא טור חיובי ולכן אינו יכול להתכנס בתנאי. נשווה טור זה לטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. ניעזר במבחן ההשוואה הגבולי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^\alpha\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}}{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}$ מתכנס אם"ם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ מתכנס אם"ם $\alpha+\frac{1}{2}>1$ אם"ם $\alpha>\frac{1}{2}$

סיכום: הטור מתכנס בהחלט כאשר $\alpha>\frac{1}{2}$. הטור מתבדר כאשר $\alpha\le\frac{1}{2}$.

ב) הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n!)}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ. אכן, $\frac{1}{\ln(n!)}$ מונוטונית יורדת המתכנסת לאפס (זה נובע מכך ש $\ln(n!)$ מונוטונית עולה שגבולה ∞). נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר את התכנסות הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$. $n!=1\cdot2\cdots n\le n^n$, פונקציית $\ln$ מונוטונית עולה ולכן $\ln\left(n^n\right)\ge\ln\left(n!\right)$ ומכאן

$\frac{1}{n\ln n}=\frac{1}{\ln\left(n^n\right)}\geq\frac{1}{\ln(n!)}$. מספיק להראות שהטור החיובי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתבדר כדי להסיק

ממבחן ההשוואה הראשון ש $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ מתבדר. $\frac{1}{n\ln n}$ חיובית מונוטנית יורדת המתכנסת

לאפס ולכן אפשר להיעזר במבחן העיבוי. נקבל שהטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס אם"ם הטור

$\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln\left(2^n\right)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2}$ אבל הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2}$ מתבדר בשל התבדרות הטור

ההרמוני $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$. לכן הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתבדר לפי מבחן העיבוי ואז הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$

מתבדר ממבחן ההשוואה הראשון.

לסיכום- הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n!)}$ מתכנס בתנאי.

3) א) נתבונן בסדרה $\left\{a_{6k}\right\}_{k=1}^{\infty}$. סדרה זו היא כמובן תת סדרה של $\left\{b_k\right\}_{k=1}^{\infty}=\left\{a_{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ ולכן

מתקיים $\lim_{k\to\infty}a_{6k}=\lim_{k\to\infty}b_k=L$. מצד שני $\left\{a_{6k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ גם תת סדרה של $\left\{c_j\right\}_{j=1}^{\infty}=\left\{a_{3j}\right\}_{j=1}^{\infty}$

ולכן, $\lim_{k\to\infty}a_{6k}=\lim_{j\to\infty}c_j=M$. מיחידות הגבול נקבל ש $L=M$.

ב) הפרכה – נגדיר סדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא: $a_n=\begin{cases}5 & 2|n\vee 3|n\\ 7 & otherwise\end{cases}$.

קל לראות מהגדרה זו ש $\lim_{k\to\infty}b_k=\lim_{j\to\infty}c_j=5$. אבל ברור שלסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ קיים גם גבול

חלקי נוסף שהוא 7 ולכן הסדרה מתבדרת. אכן, למשל מתקיים $\lim_{k\to\infty}a_{5^k}=7$ שכן תת

הסדרה $\left\{a_{5^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ היא הסדרה הקבועה $\{7\}_{n=1}^{\infty}$.