

1. תהי פונקציה  $f(x, y) = x^2y + x$

א. מצאו נקודה בה המישור המשיק לפונקציה הוא  $z = 5x + y - 4$

משוואת המישור המשיק בנקודה  $(a, b)$  היא מהצורה

$$z = f_x(a, b)x + f_y(a, b)y + C$$

נחפש נקודה  $(a, b)$  בה

$$f_x = 5, \quad f_y = 1$$

$$f_x = 2xy + 1 = 5$$

$$f_y = x^2 = 1$$

מהמשוואה השנייה  $x = \pm 1$

אם  $x = 1$  אז מהמשוואה הראשונה

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

נותר רק לוודא שהמישור עובר דרך גרף הפונקציה בנקודה  $(1, 2)$

הנקודה על גרף הפונקציה היא

$$(1, 2, f(1, 2)) = (1, 2, 3)$$

אכן המישור  $z = 5x + y - 4$  עובר דרך הנקודה  $(1, 2, 3)$  וסה"כ זה המישור המשיק בנקודה זו

ב. מצאו נקודה בה המישור המשיק לפונקציה הוא  $2z - 10x - 2y = 8$

ראשית נחלק את משוואת המישור ב 2 ונעביר אגף על מנת לקבל

$$z = 5x + y + 4$$

זו הצורה הסטנדרטית שאנחנו מכירים, ואנחנו שוב מחפשים נקודה בה  $f_x = 5, f_y = 1$ .

משוואה המישור הזו אינה עוברת דרך הנקודה  $(1,2,3)$  ולכן ננסה להציב  $x = -1$ .

מהמשוואה הראשונה נקבל כי  $-2y = 4$  ולכן  $y = -2$

הנקודה על גרף הפונקציה היא

$$(-1, -2, f(1, -2)) = (-1, -2, -3)$$

והיא אכן מקיימת את משוואת המישור  $z = 5x + y + 4$

2. מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה  $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2$

בתחום  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

ראשית נחפש נקודות חשודות פנימיות

$$f_x = x = 0$$

$$f_y = 2y = 0$$

הנקודה הפנימית החשודה היא  $(0,0)$ .

כעת נחשב נקודות חשודות על השפה  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  באמצעות משוואות כופלי לגראנז'

$$\begin{cases} x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה  $2y(1 - \lambda) = 0$  ולכן  $y = 0$  או  $\lambda = 1$

אם  $y = 0$  אז  $x = \pm 1$  ומהמשוואה הראשונה  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

סה"כ קיבלנו זוג נקודות חשודות על השפה  $(\pm 1, 0)$

כעת, אם  $\lambda = 1$  מהמשוואה הראשונה  $x = 0$  ולכן מהמשוואה השלישית  $y = \pm 1$

וקיבלנו זוג נקודות חשודות נוספות  $(0, \pm 1)$ .

עכשיו נציב את כל הנקודות החשודות:

$$f(0,0) = 0$$

$$f(\pm 1,0) = \frac{1}{2}$$

$$f(0, \pm 1) = 1$$

לכן הערך המינימלי הוא 0 והערך המקסימלי הוא 1

3. מצאו פתרון למד"ר  $xy' = 1 + y^2$  המקיים  $y(1) = 0$ .

מד"ר פרידה, תשובה סופית:

$$y = \tan(\ln(x))$$

4. מצאו פתרון למד"ר  $x^2 e^{xy} y' + 2x = -e^{xy}(1 + xy)$  המקיים  $y(1) = 0$ .

מד"ר מדוייקת, תשובה סופית:

$$y = \frac{\ln\left(\frac{2}{x} - x\right)}{x}$$

5. מצאו פתרון למד"ר  $xy'' - (x+1)y' - y = 0$  המקיים  $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 2$ .

הביעו את הפתרון באמצעות פונקציות אלמנטריות.

פתרון באמצעות טור חזקות, תשובה סופית:

$$y = x^2 e^x$$