

משך הבחינה: שעה וחצי מרצים: דר' זהבה צבי, דר' ארז שיינר מתרגלים: גב' שירן לוי, מר משה שנהב, גב' חנה שפירא

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד והנוסחאון המצורף. הוראות: משקל כל שאלה 36 נק', ענו על כל השאלות.

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = x(y^3 - y)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. מצאו פתרון למד"ר $(1 - \frac{y}{x})y' = 1 - \frac{y}{x} - \frac{e^x}{2x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 0$.

3. כדורגל בעל מסה של $m = 1kg$ נבעט כלפי מעלה מהרצפה במהירות התחלתית של $20 m/sec$.

הניחו כי כוח המשיכה הוא קבוע ושווה ל mg , כאשר g קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ. הניחו כי $g = 10$.

מצאו את גובה הכדור לאחר 2 שניות, במקרים הבאים:

א. בהנחה שאין כוחות נוספים פרט לכוח המשיכה.

ב. בהנחה שכוח התנגדות האוויר בכל רגע שווה בגודלו לגודל המהירות של הכדור.

נוסחאון מד"ר

חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:

כתיב דיפרנציאלי – את המד"ר $y' = f(x, y)$ נוכל לכתוב באופן שקול $dy = f(x, y)dx$

מד"ר פרידה – פתרון למד"ר מהצורה $f(x)dx = g(y)dy$ מקיים את המשוואה הסתומה $F(x) = G(y) + C$

כאשר $F(x) = \int f(x)dx$ וכן $G(y) = \int g(y)dy$.

מד"ר הומוגנית – מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $\int \frac{1}{g(z)-z} dz = \ln|x| + C$. נמצא את z ונציב לקבל $y = xz$.

ניתן להציג את $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ אם ורק אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

במקרה זה $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

מד"ר לינארית מסדר ראשון – פתרון למד"ר $y' + a(x)y = b(x)$ נתון ע"י הנוסחא

$$y = e^{-A(x)} \left(C + \int b(x)e^{A(x)} dx \right)$$

כאשר $A(x) = \int a(x)dx$.

משוואת ברנולי – יהי $n \neq 0, 1$, מד"ר מהצורה $y' + a(x)y = b(x)y^n$.

נציב $z = y^{1-n}$ ונקבל את המד"ר $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$.

נמצא את z ונחלץ $y = z^{\frac{1}{1-n}}$.

מד"ר מדוייקת – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה $F(x, y) = C$ כאשר $F_x = P, F_y = Q$.

שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם $P_y = Q_x$.

2. נמצא את F ע"י חישוב אינטגרל $F = \int Pdx + c(y)$.

3. נגזור ונשווה למקדם השני $Q = \frac{\partial}{\partial y} (\int Pdx + c(y))$, וכך נמצא את $c(y)$.

4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י $F(x, y) = C$.

גורם אינטגרציה – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, נחפש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שכפל בו יהפוך את המד"ר למדוייקת.

שלבי התהליך:

1. יש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ אם הביטוי $\frac{Py-Qx}{Q}$ אינו תלוי ב- y .
2. במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(x) = e^{\int \frac{Py-Qx}{Q} dx}$.
3. נכפול בגורם האינטגרציה, ונוודא שקיבלנו מד"ר מדוייקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).
4. נפתור את המד"ר המדוייקת שקיבלנו.

בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון – מציאת פונקציה y המקיימת את המד"ר $y' = f(x, y)$ וכן את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$.

המשוואה האינטגרלית – בעיית הקושי שקולה למשוואה האינטגרלית $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$.

משפט הקיום והיחידות – תהי $f(x, y)$ רציפה ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה בתחום $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$. נסמן ב- M את החסם של $|f(x, y)|$ בתחום, ונסמן $a' = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

אזי קיים פתרון יחיד y לבעיית הקושי $y' = f(x, y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ בתחום $|x - x_0| \leq a'$.

חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:

משמעות הנגזרות –

1. $y(t)$ מיקום
2. $v(t) = y'(t)$ מהירות
3. $a(t) = y''(t)$ תאוצה

החוק השני של ניוטון - $F = ma$ כאשר F הוא סכום הכוחות, m היא המסה של הגוף, וכן a הוא התאוצה של הגוף

כוח המשיכה של כדור הארץ – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא mg כאשר m היא המסה של הגוף וכן g הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ($g \approx 9.82 \text{ m/sec}^2$).

כוח קפיץ – קפיץ בעל קבוע קפיץ k מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון הפוך.

אם y הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של $-ky$.