84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – פתרון בוחן אמצע – תשפ"א

משך הבוחן: שעה וחצי הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 38 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

<u>שאלה 1</u>

נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x, y, z, w והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x + y + z + aw = 1 \\ x + y + a^2 z - w = a \\ ax + y + z + w = 1 \end{cases}$$

סעיף א': (18 נק')

מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל

נדרג את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות הנתונה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & | & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & -1 & | & a \\ a & 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - aR_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & -1 - a & | & a - 1 \\ 0 & 1 - a & 1 - a & 1 - a^2 & | & 1 - a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 1 - a & 1 - a & 1 - a^2 & | & 1 - a \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & -1 - a & | & a - 1 \end{pmatrix}$$

כעת נבדוק מי הם האיברים הפותחים, כלומר בכל שורה מי האיבר הראשון משמאל ששונה מאפס.

אם $a \neq \pm 1$ אזי $1 - a \neq 0$ וגם $a^2 - 1 \neq 0$ ולכן המטריצה מדורגת.

במקרה זה למטריצה אין שורת סתירה, והמשתנה w הינו חופשי ולכן יש אינסוף פתרונות למערכת

אם $a = 1$ המטריצה היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה מדורגת ללא שורת סתירה ושני משתנים חופשיים ולכן יש אינסוף פתרונות

אם $a = -1$ המטריצה היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

במקרה זה קיבלנו שורת סתירה, ולכן אין פתרון למערכת.

סעיף ב': (10 נק')

מצאו את הפתרון הכללי למערכת עבור $a=0$

נציב במטריצה לאחר הדירוג את $a=0$, ונמשיך לדרג אותה קנונית

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{R_1-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

המשתנה w הוא חופשי, נציב בו פרמטר $w=t$ ונקבל

$$x = t$$
$$y = 0$$
$$z = 1 - t$$

והפתרון הכללי הוא

$$(t, 0, 1-t, t) = (0,0,1,0) + t(1,0,-1,1)$$

סעיף ג': (10 נק')

מצאו את הפתרון הכללי למערכת עבור $a=1$

נציב במטריצה לאחר הדירוג את $a=1$, ונדרג אותה קנונית

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

שני המשתנים y,z הם חופשיים, נציב בהם פרמטרים

$$y = t$$
$$z = s$$

ונקבל כי

$$x = 1 - t - s$$
$$w = 0$$

והפתרון הכללי הוא

$$(1-t-s, t, s, 0) = (1,0,0,0) + t(-1,1,0,0) + s(-1,0,1,0)$$

<u>שאלה 2</u>

נביט בהעתקה הלינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T(1,0,0)=(1,1,0)$$
$$T(0,1,0)=(1,-1,-3)$$
$$T(0,0,1)=(0,1,1)$$

סעיף א': (5 נק')

מצאו את המטריצה המייצגת $[T]$

תמונות איברי הבסיס הסטנדרטי, הנתונות בשאלה, הן עמודות המטריצה המייצגת

$$[T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\0&-3&1\end{pmatrix}$$

סעיף ב': (15 נק')

קבעו האם המטריצה $[T]$ הפיכה, ואם כן מצאו את ההופכית שלה

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\0&-3&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-2&1&-1&1&0\\0&-3&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&-1\\0&-3&1&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow[R_3+3R_2]{R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&1&-3&3&-2\end{array}\right)$$

לכן המטריצה $[T]$ אכן הפיכה, וההופכית שלה היא

$$[T]^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&-1\\-3&3&-2\end{pmatrix}$$

סעיף ג': (3 נק')

מצאו את $T(1,2,3)$

הפעלת הפונקציה שקולה לכפל במטריצה המייצגת

$$[T]\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$$

ולכן

$$T(1,2,3)=(3,2,-3)$$

סעיף ד': (15 נק')

יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ פרמטרים, מצאו וקטור (x,y,z) כך ש $T(x,y,z)=(a,b,c)$. הביעו את תשובתכם באמצעות הפרמטרים.

אנחנו מחפשים x,y,z כך ש

$$T(x,y,z)=(a,b,c)$$

כלומר

$$[T]\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

נכפול במטריצה ההופכית שמצאנו בסעיף ב'

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [T]^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b+c \\ -a+b-c \\ -3a+3b-2c \end{pmatrix}$$

כלומר גילינו כי

$$T(2a-b+c,-a+b-c,-3a+3b-2c) = (a,b,c)$$

כפי שרצינו.

<u>שאלה 3</u>

סעיף א': (15 נק')

מצאו את כל הפתרונות בשדה המרוכבים למשוואה $z^4 = \left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)^4$

ראשית נעביר את המספר $1+\sqrt{3}i$ לצורה קוטבית

$$r = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

כיוון שהחלק הממשי 1 הוא חיובי, הזוית היא

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60°$$

לכן

$$1+\sqrt{3}i = 2cis(60°)$$

ולכן

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^4 = 2^4 cis(4\cdot 60°) = 16cis(240°)$$

אם כך, אנחנו מעוניינים בארבעת הפתרונות למשוואה

$$z^4 = 16cis(240°)$$

והם מתקבלים מהצבת $k = 0,1,2,3$ בנוסחא

$$z_k = \sqrt[4]{16}cis\left(\frac{240° + k\cdot 360°}{4}\right)$$

סעיף ב': (15 נק')

מצאו את כל הפתרונות בשדה המרוכבים למשוואה $z^2 = -z^4$

ראשית נעביר אגף

$$z^2 + z^4 = 0$$

כעת נוציא גורם משותף

$$z^2(1+z^2) = 0$$

זה מתקיים אם $z^2 = 0$ או $1+z^2 = 0$

כעת, $z^2 = 0$ רק כאשר $z = 0$ וזה הפתרון הראשון שלנו.

לאחר מכן, נפתור את המשוואה $1+z^2 = 0$, נתחיל בלהעביר אגף

$$z^2 = -1$$

למשוואה זו שני פתרונות $z = \pm i$, ואלה הם הפתרון השני והשלישי של המשוואה.

סעיף ג': (8 נק')

מצאו וקטור שונה מאפס המאונך לוקטורים $(1,1,1)$, $(2,-1,1)$

נסמן את הוקטור שאנחנו מחפשים ב(x,y,z)

אנחנו רוצים שהמכפלה הסקלרית שלו עם שני הוקטורים הנתונים תהיה אפס

$$(1,1,1)\cdot(x,y,z)=0$$

$$(2,-1,1)\cdot(x,y,z)=0$$

אנחנו מקבלים מערכת משוואות לינארית עם שתי משוואות:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

אנחנו מחפשים פתרון כלשהו למערכת, שאינו וקטור האפס.

נדרג קנונית את המטריצה המתאימה למערכת ההומוגנית הזו

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

מתקיים כי z הוא משנה חופשי, נציב בו פרמטר $z=t$

ונקבל

$$x=-\frac{2}{3}t$$
$$y=-\frac{1}{3}t$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\left(-\frac{2}{3}t,-\frac{1}{3}t,t\right)=t\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$$

אנחנו מחפשים וקטור אחד (שאינו וקטור האפס), נציב למשל $t=3$ (סתם בשביל לקבל מספרים שלמים)

נקבל את הוקטור

$$(-2,-1,3)$$