הרצאה 7

בעיות חד-ממדיות:

$$L(q,\dot q) = \tfrac{1}{2}\boxed{\alpha(q)}\,\dot q^2 - U(q)$$

קינטית

פוטנציאלית

מסה שונה

$$L(x,\dot x) = \tfrac{1}{2}\boxed{m^*}\dot x^2 - U(x)$$

קבוע

אפשר לעבור על ציר אחד כי זה מה שמעניין אותי

$$L(x) = \tfrac{1}{2} m^* \dot x^2 - U(x)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

הלגרנז'יאן לא תלוי במפורש בזמן $\Rightarrow$ יש שימור אנרגיה.

$$\frac{1}{2} m^* \dot x^2 + U(x) = E$$ משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון.

$$\frac{1}{2} m^* \dot x^2 = E - U(x)$$

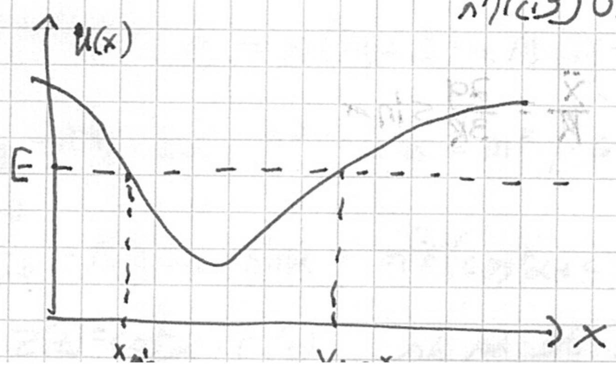
$$\dot x^2 = \frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}$$

$$\text{const} + \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}} = \int dt$$

$$\boxed{t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m^*}\left(E-U(x)\right)}} + \text{const}}$$

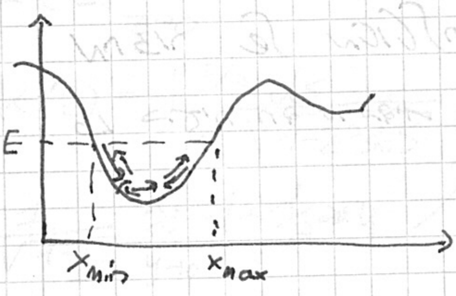
בהנחה ש-m^* קבוע האינטגרל תלוי ב $U(x)$ אם אני אחקור את האנרגיה הפוטנציאלית



$$X_{min} \le X \le X_{MAX}$$

עבור $X \in \{X_{min}, X_{max}\}$

$E = U(x) \Rightarrow \dot{x} = 0$



עבור $-\infty < X_{min} < X_{max} < \infty$

נקראת תנועה מוגבלת

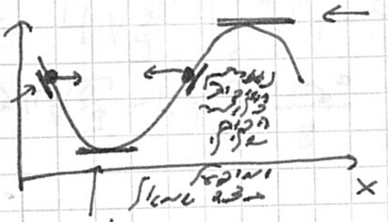
עבור $X_{min} \to -\infty$

או $X_{max} \to \infty$

נקראת תנועה לא מוגבלת

$F(x) = -\frac{dU}{dx}$

נגזרת שלילית כלומר הכוח חיובי ומופעל בכיוון ימין.



$\frac{dU}{dx} = 0$

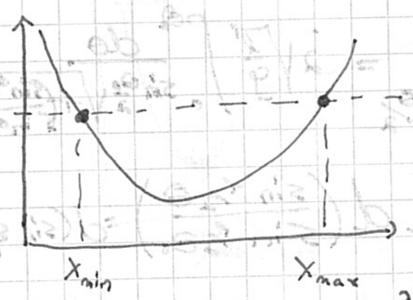
$\leftarrow \frac{dU}{dx} = 0$ נקודות שבהן הכוח שווה ל-0 מוגדרות כנקודות שיווי משקל

[הם לא יציבות]

$\leftarrow$ שיווי משקל יציב
שאני אתן לה הזזה מהירה הכוח יחזיר אותה לנקודת שיווי המשקל.

שיווי משקל לא יציב - הכוח לא יחזיר אותה לנקודת שיווי המשקל בהנחה שנתנו לה הזזה מהירה.

צורה נוספת - של שיווי משקל לא יציב



זמן מחזור עבור תנועה מוגבלת -

הזמן בין X_{min} ל X_{max}: ראינו מקודם שהוא שווה ל

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{X_{min}}^{X_{max}} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

זמן מחזור מוגדר כמה זמן לוקח לי לחזור לאותו מקום

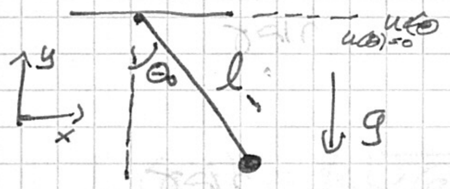
הלגרנזיאן לא משתנה תחת החלפה של t ב-$-t$!

$$L(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \to \frac{dx}{-dt}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(-\frac{dx}{dt}\right)^2$$

זמן מחזור $\to T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{X_{min}}^{X_{max}} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$



דוגמה בפשטות: מטוטלת מתמטית.

למצוא את הקירוב סדר ראשון עבור זמן מחזור של מטוטלת.

זו בעיה חד מימדית כי אנחנו מסתכלים רק θ

$$U(\theta) = -mgl\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \rightarrow \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad r = l$$

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}(ml^2)\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

$$T = 2\sqrt{\frac{m'}{2}}\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{E-U(\theta)}}$$

בגלל סימטריות הבעיה

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{m'}{2}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{E-U(\theta)}}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{m'}{2}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{-mgl\cos\theta_0 - (-mgl\cos\theta)}}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta_0}{2} + \sin^2\frac{\theta_0}{2}}}$$

$$\cos\theta = \cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2$$

[illegible]

$$= 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\theta/2}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\theta/2}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sin\frac{\theta_0}{2}\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta/2}{\sin^2\theta_0/2}}}$$

[illegible]

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta_0} = \sin\xi$$

$$d\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta_0}\right) = d(\sin\xi)$$

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\theta_0}\,\frac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta = \cos\xi\,d\xi$$

$$\begin{cases} \theta = 0 & \sin\xi = 0 \rightarrow \xi = 0 \\ \theta = \theta_0 & \sin\xi = 1 \rightarrow \xi = \pi/2 \end{cases}$$

$$\frac{d\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta_0} = \frac{2\cos\xi\,d\xi}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \frac{2\cos\xi\,d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}\theta}}$$

$$\cancel{\frac{d\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta_0}}$$

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos\xi\,d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}\theta_0\sin^2\xi}\;\sqrt{1-\sin^2\xi}}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K\left(\sin\tfrac{1}{2}\theta_0\right)$$

אינטגרל אליפטי מושלם מספר שני

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1-z^2\sin^2 s}}$$

אנחנו רוצים לפתח את $K(\sin\frac{1}{2}\Theta_0)$ עבור $\Theta_0 << 1$.

$$K(z) \underset{z\to 0}{\sim}$$

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1-z^2\sin^2 s}} \underset{z\to 0}{\approx} \int_0^{\pi/2} 1+\frac{1}{2}z^2\sin^2 s\, ds$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} \underset{y\to 0}{\approx} 1+\frac{1}{2}y$$

$$K(\sin\tfrac{1}{2}\Theta_0) \approx \int_0^{\pi/2}\left(1+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\Theta_0)^2\sin^2 s\right)ds$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta_0 \sim \tfrac{1}{2}\Theta_0$$

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{\Theta_0^2}{8}\sin^2 s\right)ds$$

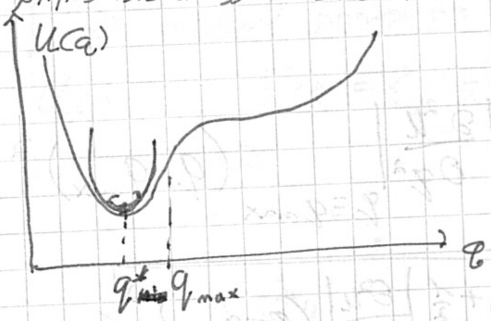
$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + 4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\Theta_0^2}{8}\int_0^{\pi/2}\sin^2 s\, ds$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 s\,ds = \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2s}{2}ds = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2s\, ds$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \underbrace{\boxed{\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\Theta_0^2}{8}\pi}}_{\text{האיבר החדש}}$$

הרצאה 8

יהי פוטנציאל כללי ואנחנו לוקחים קירוב



$$E = \text{אנרגיה קינטית} + \text{אנרגיה פוטנציאלית}$$

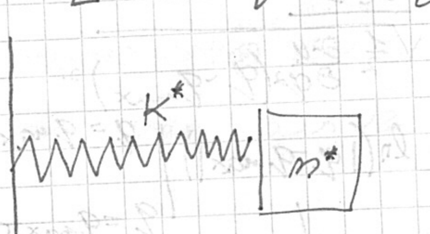
$$E = \frac{1}{2}m^*\dot{q}^2 + \frac{1}{2}k^*q^2 + \underbrace{U(q^*)}_{0} \leftarrow \text{קבוע}$$

$$k^* = \left|\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q^*=0}$$

$$E = \frac{1}{2}m^*\dot{q}^2 + \frac{1}{2}k^*q^2$$

$$U(q) \approx U(q^*) + 0 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q^*}(q-q^*)^2$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q^*}$$



$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_0^{q_{max}}\frac{dq}{\sqrt{E-\frac{1}{2}k^*q^2}}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_0^{q_{max}}\frac{dq}{\sqrt{\frac{1}{2}k^*q_{max}^2-\frac{1}{2}k^*q^2}}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_0^{q_{max}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}k^*q_{max}^2}}\frac{dq}{\sqrt{1-(q/q_{max})^2}}$$