

## תרגול 8, מבנים אלגבריים להנדסה

22 במאי 2019

**הגדרה:** חוג הוא קבוצה  $R$  עם פעולות חיבור (+) וכפל ( $\cdot$ ), ואיבר 0, כלומר, רביעייה  $(R, +, \cdot, 0)$  כך ש:

•  $(R, +, 0)$  חבורה אבלית (0 הוא איבר היחידה).

•  $(R, \cdot)$  אגודה (פעולת הכפל אסוציאטיבית).

ישנם סוגים שונים של חוגים:

1. חוג עם יחידה (מסומנת ב-1): כלומר זו חמישייה  $(R, +, \cdot, 0, 1)$  כך שבנוסף לדרישות לעיל מתקיים ש-  $(R, \cdot, 1)$  הוא מונואיד, ובנוסף מתקיים חוק הפילוג:  $\forall a, b, c : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ . לדוגמא:  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

2. חוג קומוטטיבי: חוג בו פעולת הכפל היא חילופית. לדוגמא:  $\mathbb{Z}$ .

3. חוג עם חילוק: חוג בו מתקיים ש-  $(R, \cdot, 1)$  היא חבורה, כלומר לכל איבר יש הופכי כפלי. נחכה רגע עם דוגמא.  $(GL_n(\mathbb{R}))$  היא לא חוג, כי לא סגורה לחיבור).

4. חוג עם חילוק קומוטטיבי, נקרא גם שדה: שני האחרונים מתקיימים יחד. לדוגמא: השדות המוכרים לנו  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , וכן  $\mathbb{Z}_p$  עבור  $p$  ראשוני. קשה למצוא דוגמא לחוג עם חילוק שאיננו קומוטטיבי.

**תרגיל:** נתבונן בחוג הפולינומים הבא:  $\mathbb{Z}_4[x]$ , זהו חוג קומוטטיבי עם יחידה. האם הוא עם חילוק?

**פתרון:** לא! האיבר  $2x$  לא הפיך. הוכחה: נניח בשלילה שכן, כלומר קיים פולינום  $p(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$  כך ש-

$$2x \cdot p(x) = 1$$

נכפיל את שני האגפים ב-2 ונקבל:

$$4x \cdot p(x) = 2$$

אבל אנחנו בפולינומים מעל  $\mathbb{Z}_4$ , ולכן  $4 \equiv 0$ , ולכן קיבלנו

$$0 = 2$$

בסתירה. לכן  $2x$  לא הפיך.

האם יש פולינום הפיך בחוג זה? כן. למשל:

$$(1 + 2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2 = 1$$

(כאשר השיוויון הימני נובע מהובדה שאנחנו ב- $\mathbb{Z}_4$ ). לכן,  $1 + 2x$  הפיך והוא ההופכי של עצמו.

**תרגיל:** יהי  $R$  חוג המקיים:

$$\forall x \in R : x^2 = x$$

הוכיחו כי  $R$  חוג קומוטטיבי.

**פיתרון:** צריך להראות שלכל  $a, b \in R$  מתקיים:  $a \cdot b = b \cdot a$ . לפני שנגיע לזה נשים לב

ש:

$$a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + b + ab + ba$$

ולכן (ע"י העברת אגפים) נקבל  $ab = -ba$ . כעת:

$$ab = (ab)^2 = (-ba)^2 = (ba)^2 = ba$$

כאשר שיוויון \* יהיה בתרגיל הבית.