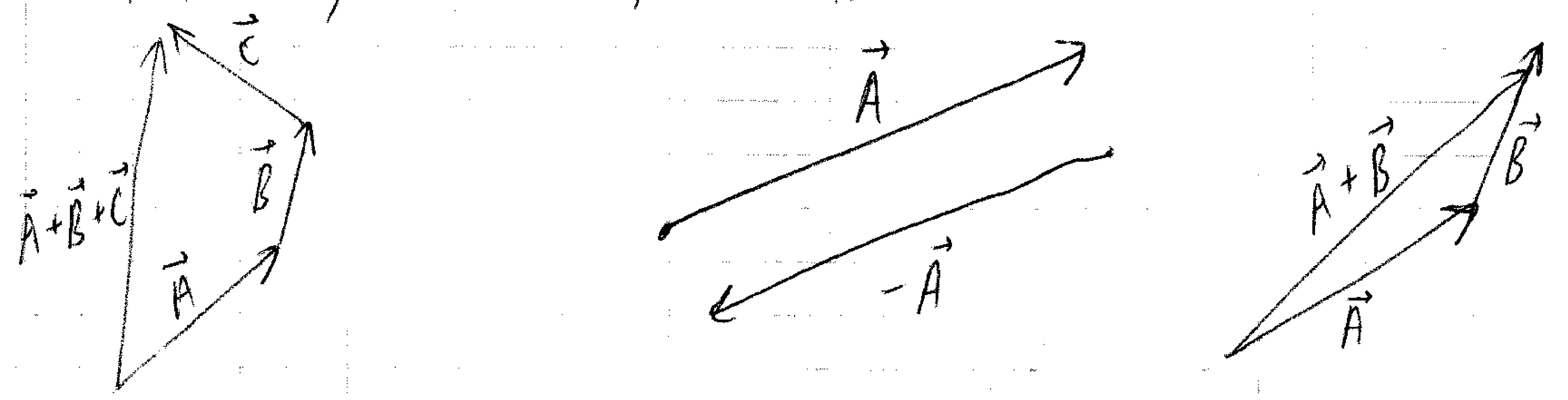
פיסיקה קלאסית 1: תרגול 1: (1)

תזכורת:

גדלים שונים בפיסיקה כמו זמן ומסה ניתנים לתיאור ע"י מספר ממשי יחיד פלוס יחידות. גדלים אלו נקראים סקלרים ומסומנים באות לטינית או יוונית.
גדלים אחרים בפיסיקה כמו העתק ומהירות צריכים להיות מצויינים ע"י גודל וכיוון, גדלים אלו נקראים וקטורים. וקטור מיוצג ע"י אות מודגשת (בספרות) או ע"י אות עם חץ מעליה בכתיבה. גודל הוקטור $\vec{A}$ מצוין ע"י $|\vec{A}|$.



הגדרת חיסור וקטורים: $\vec{A}-\vec{B} \equiv \vec{A}+(-\vec{B})$

מכפלה של וקטור $\vec{A}$ בסקלר q נותנת וקטור באורך $q|\vec{A}|$ ובכיוון כמו $\vec{A}$.

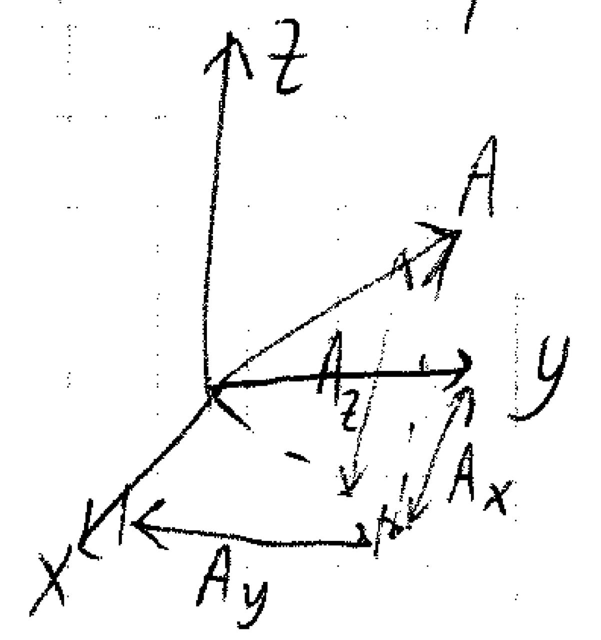
וקטור היחידה של וקטור $\vec{A}$ הוא וקטור בכיוון $\vec{A}$ באורך 1 ונתון ע"י $\hat{A} \equiv \vec{A}/|\vec{A}|$

אנו עובדים במע' קורדינטות ימנית:

$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$

$\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$

$\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$



$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ הם וקטורי יחידה בכיוון ציר x, ציר y וציר z בהתאמה.

משרטטים וקטור במערכת הצירים כשראשיתו בראשית. אם $\vec{A}=(1,2,3)$ אז $\vec{A}=1\cdot\hat{x}+2\cdot\hat{y}+3\cdot\hat{z}$

גודל הוקטור הוא שורש סכום ריבועי הרכיבים: $|\vec{A}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}$

הוקטור $\vec{r}$ מוגדר כ: $\vec{r}=(x,y,z)=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$

$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad \hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}$

מכפלה סקלרית: $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)\ ,\ \vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$

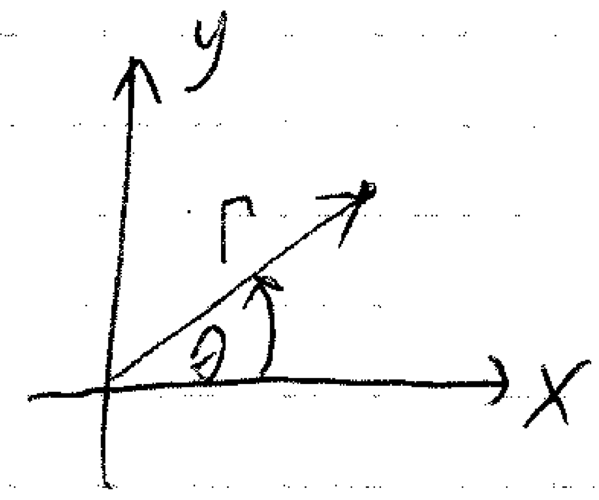
קיימת לכל מימד. $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

מכפלה וקטורית: $|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

קיימת רק ב-3D.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

קואורדינטות פולריות הן קואורדינטות אלטרנטיביות ל-2D.



אורך הוקטור הוא r הזווית עם הכיוון החיובי
של ציר ה-x היא θ. $r=\sqrt{x^2+y^2}$; $x=r\cos\theta$

$\theta = atan2(x,y) = \begin{cases} tg^{-1}(\frac{y}{x}) & x>0 \\ tg^{-1}(\frac{y}{x})+\pi & x<0 \end{cases}$; $y=r\sin\theta$

תרגיל:

נתונה הנקודה $(7,5)$. רשמו את הוקטור $\vec{a}$ המתאים לנקודה בשתי הדרכים הבאות:

א. בעזרת וקטורי היחידה $\hat{x},\hat{y}$.

ב. בקואו' פולריות (r,θ).

פתרון:

א. $\vec{a}=7\hat{x}+5\hat{y}$

ב. $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}$

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)\approx 35.54^\circ = 0.62\ \text{radian}$

תרגיל:

נתונים הוקטורים הבאים:
$\vec{a}=5\hat{x}$, $\vec{b}=8\hat{z}$, $\vec{c}=3\hat{x}-4\hat{y}$
$\vec{d}=5\hat{x}+3\hat{y}-8\hat{z}$, $\vec{e}=-3\hat{x}-7\hat{y}+\hat{z}$

א. חשבו את הגדלים הבאים:
$5\vec{a}-7\vec{b}+3\vec{c}$
$(\vec{b}+\vec{d})\cdot\vec{e}$

ב. מה הזווית בין הוקטור $\vec{a}$ לוקטור $\vec{b}$?

ג. מה הזווית בין $\vec{d}+\vec{c}$ לבין $\vec{c}$?

פתרון:

א. נכתוב רכיבי הוקטורים הם:
$\vec{a}=(5,0,0)$, $\vec{b}=(0,0,8)$, $\vec{c}=(3,-4,0)$
$\vec{d}=(5,3,-8)$, $\vec{e}=(-3,-7,1)$

$5\vec{a}-7\vec{b}+3\vec{c}=5(5,0,0)-7(0,0,8)+3(3,-4,0)=(25,0,0)-(0,0,56)+(9,-12,0)=$
$=(34,-12,-56)=34\hat{x}-12\hat{y}-56\hat{z}$

$(\vec{b}+\vec{d})\cdot\vec{e}=((0,0,8)+(5,3,-8))\cdot(-3,-7,1)=$
$=(5,3,0)\cdot(-3,-7,1)=-15-21+0=-36$

ב. מהגדרת המכפלה הסקלרית:

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{(5,0,0)\cdot(0,0,8)}{5\cdot 8}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

הוקטורים מאונכים זה לזה.

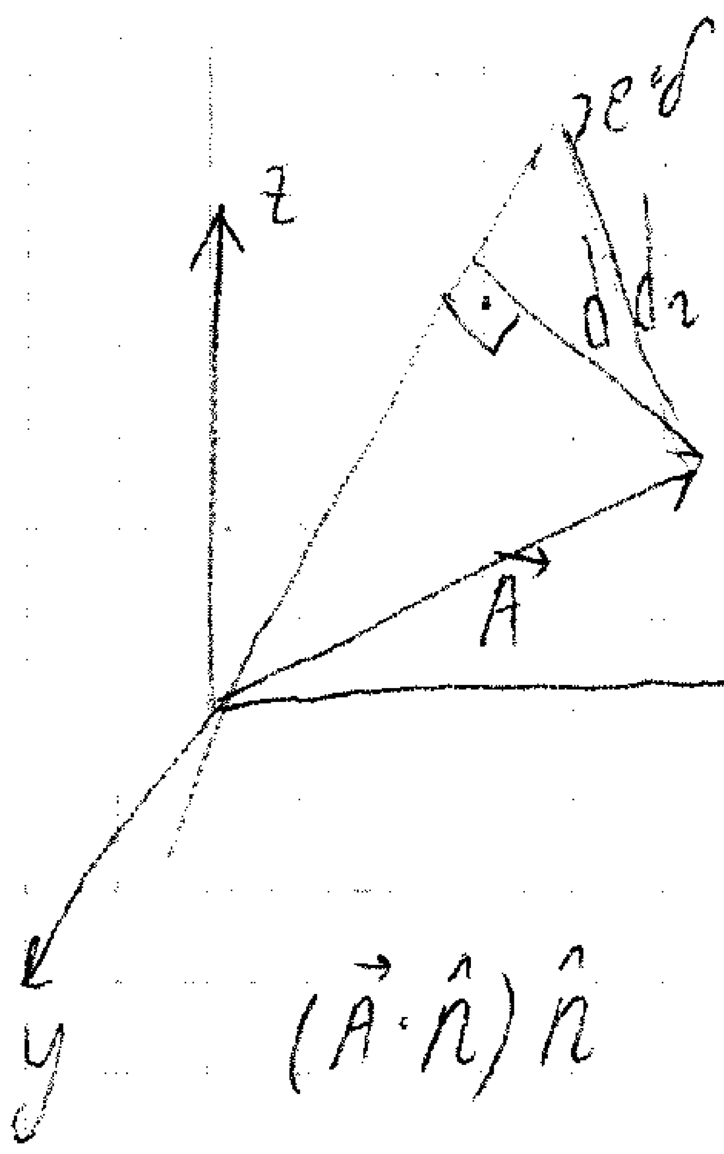
$$\vec{c}+\vec{d}=(3,-4,0)+(5,3,-8)=(8,-1,-8)$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{c}\cdot(\vec{c}+\vec{d})}{|\vec{c}||\vec{d}+\vec{c}|}=\frac{(3,-4,0)\cdot(8,-1,-8)}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{8^2+1^2+8^2}}=\frac{28}{\sqrt{25}\sqrt{129}}\approx 0.5 \Rightarrow \theta\approx 60^\circ=\frac{\pi}{3}\,rad$$

תרגיל:

מה המרחק בין ישר העובר בראשית במקביל לוקטור היחידה $\hat{n}$ לבין נקודה A כלשהי במרחב?

פתרון:



יש למצוא את האורך d שבשרטוט שהוא אורך האנך מהנקודה A לישר. זה המרחק הקצר ביותר כי אם ניקח זווית אחרת, נקבל יתר במשולש ישר זווית שארוך מהניצב בהכרח.

נפרק את $\vec{A}$ ל-2 רכיבים: מקביל ל-$\hat{n}$ וניצב ל-$\hat{n}$.

הרכיב המקביל ל-$\hat{n}$ הוא הטל $\vec{A}$ בכיוון $\hat{n}$ לפי הנוסחה:

$(\vec{A}\cdot\hat{n})\hat{n}$

הרכיב המאונך ל-$\hat{n}$ הוא: $\vec{A}-(\vec{A}\cdot\hat{n})\hat{n}$

המרחק d הוא גודל וקטור זה.

$$d=|\vec{A}-(\vec{A}\cdot\hat{n})\hat{n}|$$

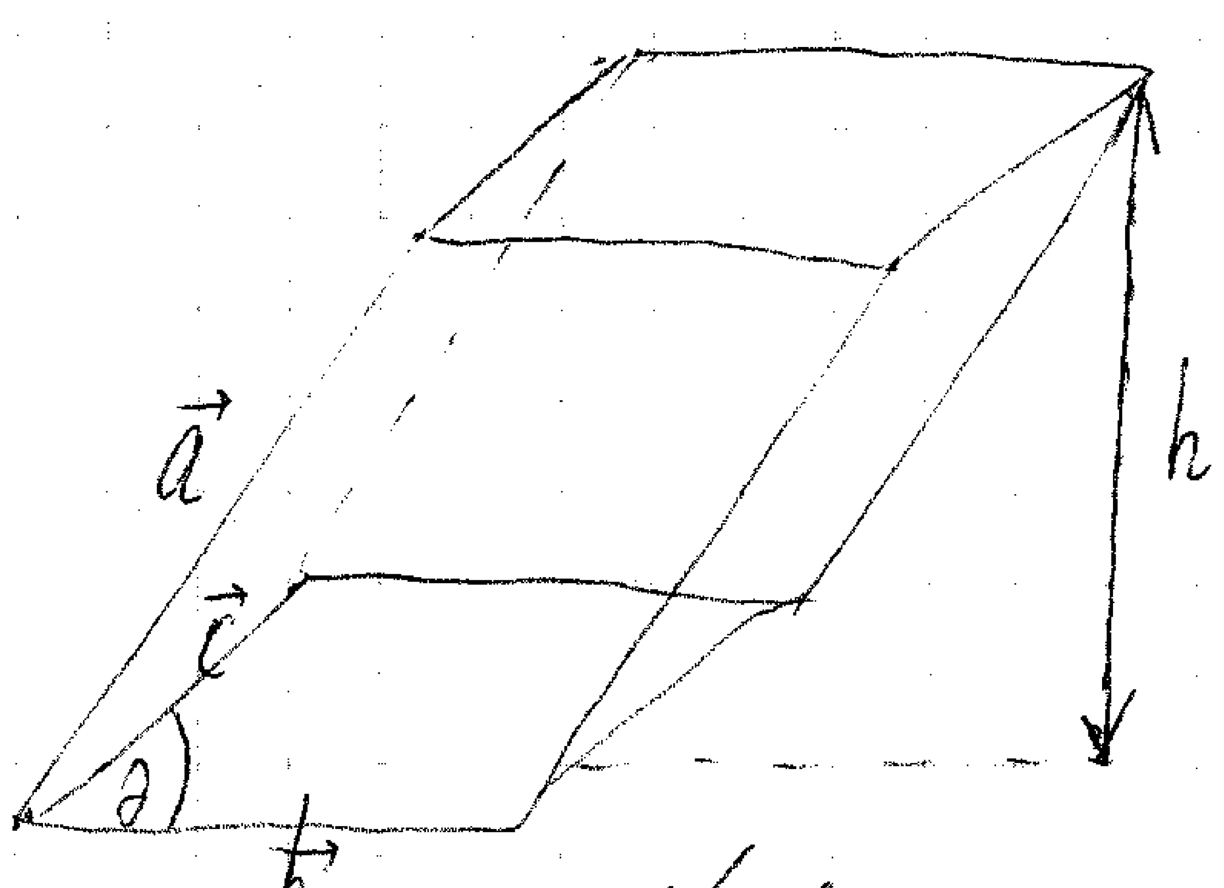
תרגיל:

מהו הנפח של מקבילון המוגדר ע"י שלושת הוקטורים $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

הערה: שימו לב כי:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

פתרון:



ידוע מגאומטריה שנפח מקבילון הוא $V=A_1 h$ כאשר A_1 הוא שטח הבסיס ו-h הוא אורך האנך בשרטוט.

נרצה לבטא גדלים אלו בתלות ב- $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. ידוע מטריגונומטריה ששטח מקבילית הוא פעמיים שטח משולש הנתון ע"י:

$$A_1=\left(|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\frac{\sin\theta}{2}\right)\cdot 2=|\vec{b}||\vec{c}|\sin\theta=|\vec{b}\times\vec{c}|$$

h הוא אורך הטל של $\vec{a}$ בכיוון האנך לבסיס. כיוון ש $\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$ הוא הוקטור יחידה בכיוון ניצב לבסיס לכן:

$$h=\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}\right) \Rightarrow V=A_1 h=|\vec{b}\times\vec{c}|\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}\right)=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

מ.ש.ל

תרגיל: מצאו את הזווית בין הוקטור $\vec{a}=(3,5,7)$ לבין המישור המוגדר בעזרת הוקטורים $\vec{b}=(-2,-3,7)$ ו- $\vec{c}=(4,11,3)$.

פתרון:

ידוע שוקטור הניצב למישור הנפרש ע"י הוקטורים $\vec{b}$ ו- $\vec{c}$ הוא $\vec{b}\times\vec{c}$. הזווית בין $\vec{a}$ לוקטור זה נתונה ע"י:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}\times\vec{c}|}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+5^2+7^2}=\sqrt{83}$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\ b_x&b_y&b_z\\ c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\ -2&-3&7\\ 4&11&3\end{vmatrix}=(-9-77)\hat{x}+(28+6)\hat{y}+(-22+12)\hat{z}=$$

$$=-86\hat{x}+34\hat{y}-10\hat{z}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(3,5,7)\cdot(-86,34,-10)=-158$$

$$|\vec{b}\times\vec{c}|=\sqrt{86^2+34^2+10^2}\approx 93.01$$

$$\cos\theta\approx\frac{-158}{\sqrt{83}\cdot 93.01}\approx-0.186\Longrightarrow\theta=1.758\,rad$$

The angle with the plane is Pi/2-theta which comes to -0.187 radians.

תרגיל: הוכיחו מ- $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ את משפט הקוסינוסים:

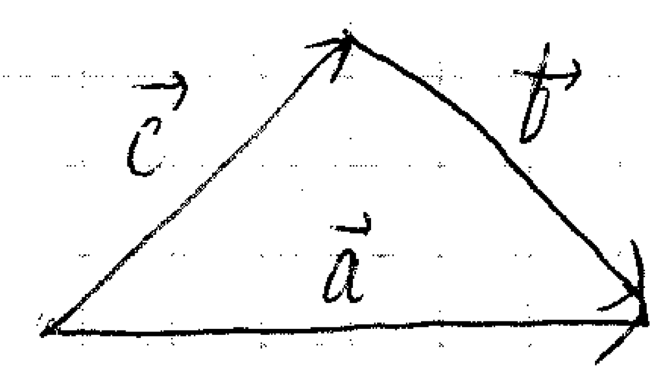
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

פתרון:

$$c^2=|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=$$

$$=a^2-2ab\cos\gamma+b^2$$

מ.ש.ל.



חומר נוסף לעיון:

Theoretical mechanics / Spiegel page 15, 21