(7) **דוגמא:** האם קיימות פונקציות f ו-g שאנליטיות בסביבה של $z_0=0$ ומקיימות

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,3,\dots$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right)=g\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3},\quad n=1,2,3,\dots$$

פתרון: f קיימת כי ניתן לבחור $f(z)=z^2$
אם קיימת פונקציה g שמקיימת את התנאי בשאלה
אזי כיוון ש- $g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$ והסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
יש נקודת הצטברות $z_0=0$ נקבל ממשפט
היחידות ש- $g(z)=z^3$ בסביבה של $z_0=0$,
לכן $g\left(-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n^3}$ בסתירה לנתון ש-
$g\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$.

נקודות סינגולריות וטורי לורן

הגדרה: אם f היא פונ' אנליטית בעיגול הנקוב
$0<|z-\alpha|<r$ ואינה גזירה בנק' $z=\alpha$
אזי α נקראת סינגולרית של f. ההגדרה
כוללת גם האפשרות ש-f אינה מוגדרת
ב-$z=\alpha$.

הגדרה: תהי α נקודה סינגולרית של f, אזי

א. α נקראת נק' סינגולרית סליקה אם קיים
הגבול $\lim_{z\to\alpha} f(z)$

ג. α נקודת קוטב מסדר $m>1$ אם

$$0 < \limsup_{z\to\alpha} |z-\alpha|^m |f(z)| < \infty$$

ב. α נקודה סינגולרית עיקרית אם

$$\limsup_{z\to\alpha} |z-\alpha|^m |f(z)| = \infty$$ לכל m טבעי.

הערה: כאשר ל-f יש קוטב מסדר $m>1$ בנקודה $\alpha=z$ אז סביב $z=\alpha$ ניתן להציג את f כ- $f(z)=\frac{g(z)}{(z-\alpha)^m}$ כאשר $g(\alpha)\neq 0$.

דוגמאות: מצאו את נקודות הסינגולריות של הפונקציות ומיינו אותן.

א. $f(z)=\frac{\cos z}{z^2}$

פתרון: ל-f יש סינגולריות ב-$z=0$ ו- $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \cos z = 1$, כלומר

$0 < \lim_{z\to 0} z^2 \cos z < \infty$ ולכן ל-f יש

קוטב מסדר 2 ב-$z=0$.

ז) $f(z)=\tan(z)$

פתרון: $\tan(z)=\frac{\sin(z)}{\cos(z)}$, ולכן הנקודות הסינגולריות הן הנקודות בהן $\cos$ מתאפס, כלומר

$z=\frac{\pi}{2}+\pi k$ לכל k. כיוון ש-

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}+\pi k}\left(z-\frac{\pi}{2}-\pi k\right)f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}+\pi k}\frac{\sin(z)\left(z-\frac{\pi}{2}-\pi k\right)}{\cos(z)}$$

$$\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}+\pi k}\frac{\cos(z)\left(z-\frac{\pi}{2}-\pi k\right)+\sin(z)}{-\sin(z)}=-1$$

לכן $0<\lim_{z\to\frac{\pi}{2}+\pi k}\left|\left(z-\frac{\pi}{2}-\pi k\right)f(z)\right|<\infty$

ולכן ל-f יש קוטב מסדר 1 בנקודות אלו.

ה) $f(z)=\exp\left(z+\frac{1}{z}\right)$

פתרון: ל-f יש סינגולריות בנקודה $z=0$, נראה שהסינגולריות היא עיקרית ונחשב

$$L=\limsup_{z\to 0}\left|z^n\exp\left(z+\frac{1}{z}\right)\right| \quad (*)$$

נגביל את z לציר הממשי, וכיוון ש- הגבול העליון הוא הגבול הגדול ביותר נקבל

$$L\geq\lim_{t\to 0^+}t^n e^{t+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0^+}t^n e^{\frac{1}{t}}\lim_{t\to 0^+}e^t$$

$$= \lim_{t \to 0^+} t^n e^{\frac{1}{t}} = \infty$$

לכן הגבול (*) שואף לאינסוף לכל n טבעי
ולכן הסינגולריות היא עיקרית.

ב. $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

פתרון: ל-f יש סינגולריות בהן מתקיים
$e^z - 1 = 0$, כלומר $z = 2\pi i k$. עבור $z=0$
הסינגולריות היא סליקה ואכן

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{z \to 0} \frac{1}{e^z} = 1$$ (הגבול קיים)

עבור $z = 2\pi i k \neq 0$ נקבל

$$\lim_{z \to 2\pi i k} (z - 2\pi i k)\frac{z}{e^z - 1} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{z \to 0} \frac{2z - 2\pi i k}{e^z} = -2\pi i k \neq 0$$

לכן ב-$z = 2\pi i k \neq 0$ יש קוטב מסדר 1

ג. $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$

פתרון: $\sin(\frac{1}{z})$ מתאפסת עבור
$z = \frac{1}{2\pi i k}$ $(k \neq 0)$ ולכן ל-f יש סינגולריות
בנקודות אלו. f גם אינה מוגדרת ב-$z=0$.

אבל הנקודה $z=0$ איננה נקודה סינגולרית
של f כיוון שלא קיים עיגול נקוב $0<|z|<r$
שבו f אנליטית כי עבור k מספיק גדול
הנקודה $\frac{1}{2\pi k}$ נמצאות בתוך העיגול הנקוב.

לכן הנקודה $z=0$ איננה ניתנת לאפיון.
בנקודות $z=\frac{1}{2\pi k}$ הם קטבים של-f יש
קוטב מסדר ראשון.