חשבון אינפיניטסימלי 4

פרופסור אנדריי לרנר

ספרות:

- C.H. Edwards: Advanced Calculus of Several Variables
- A. Browder: Mathematical Analysis: An Introduction
- S.H. Somethingggg: Differential Forms

מרצה:

- פרופסור אנדריי לרנר, מייל lernera@math.biu.ac.il
- ציון סופי מורכב מ90% מבחן ו10% בוחן (ואין טעם לבכות על זה ע"פ הרב כספי)

שיעור 1 (23.2.2014) – מבוא

מטרת הקורס שלנו היא בעצם להוכיח את משפט סטוקס הכללי, כאשר:

I. w - היא תבנית (k-1) דיפרנציאלית על $\mathbb{R}^n$.
II. ∂w – הדיפרנציאל של w.
III. M - שטח k מימדי ב$\mathbb{R}^n$ בעל אוריינטציה.
IV. ∂M - השפה של M עם אוריינטציה מושרית.
V. $\int$ - אינטגרל של תבנית מעל משטח.

שדות וקטורים:

הגדרה: נניח $\Omega \in \mathbb{R}^n$. לפונקציה $f: \Omega \to \mathbb{R}$ נקרא שדה סקלרי. לפונקציה $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ נקרא שדה וקטורי. נניח שn=m, ונניח גם שn=2,3. ואז $f: \Omega \to \mathbb{R}^2$ זו העתקה שמתאימה ל$x \in \Omega$ וקטור מx לx+f(x).

דוגמאות:

1. נניח $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, כך ש$f(x,y) = (1,3)$ ו$(x,y) \to (3+x, 1+y)$.
2. נניח ש$f(x,y) = (x,y)$ ואז $(x,y) \to (2x, 2y)$ זרימת נוזל מהראשית.
3. $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ סביבת מים סביב חור ניקוז.
4. שדה כח כבידה: $F = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$.

סימון: נניח $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ואז $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ונניח כי $f = (f_1, \dots, f_m)$. נשתמש בסימון $f \in C^k(\Omega)$ אם $f_i \in C^k(\Omega)$ לכל i=1,2,..,m ואם m=1 אז $C^k(\Omega)^1 = C^k(\Omega)$.

סימון: תהי $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $grad(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ ניתן להתייחס כאופרטור $grad: C^1(\Omega) \to C^0(\Omega)^n$.

הגדרה: יהי $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי דיפרנציאבילי. הדיברגנס של f מוגדר כל ידי $div(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}$ ושוב מתקיים $div: C^1(\Omega)^n \to C^0(\Omega)$.

הגדרה: יהי $f: \Omega \to \mathbb{R}^3$, כאשר $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, שדה וקטורי דיפרנציאלי. Curl הוא שדה וקטורי המוגדר על ידי:

$$\nabla \times F = curl(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).$$

נגדיר את המשולש ההפוך, הנבלה (∇), כדלהלן: $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. מתקיים כי:

- $grad(f)=\nabla f$ – פולט וקטור
- $div(f)=\nabla\cdot f$ – פולט סקלר
- $curl(f)=\nabla\times f$ – פולט וקטור

<u>למה</u>: נניח $\psi,\varphi\in C^1(\Omega)$ ו-$f,g\in C^1(\Omega)^n$ אזי מתקיים:

1. $grad(\varphi\psi)=\psi grad(\varphi)+\varphi grad(\psi)$
2. $grad(f\cdot g)=gJf+fJg$ וכאן J מסמן מטריצת יעקובי.
3. $div(\varphi\psi)=(grad\varphi)\cdot f+\varphi div(f)$
4. $div(f\times g)=g\cdot curl(f)-f\cdot curl(g)$
5. $curl(\varphi f)=grad\varphi\times f+\varphi curl(f)$
6. $curl(f\times g)=f div(g)-g div(f)+gJf-fJg$

הוכחה:

נוכיח את סעיף 4, $div(f\times g)=\nabla\cdot(f\times g)=\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times g)+\nabla\cdot(f\times\boldsymbol{g})=\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times g)-\nabla\cdot(\boldsymbol{g}\times f)$

$=g\cdot(\nabla\times f)-f\cdot(\nabla\times g)=g\cdot curl(f)-f\cdot curl(g).$ מ.ש.ל. ■

<u>למה</u>: א. יהי $\varphi\in(\Omega)$ שדה סקלרי כלשהו $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ אזי $curl\big(grad(\varphi)\big)=0$.

ב. יהי $f\in C^2(\Omega)^3$ כאשר $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ אזי $div\big(curl(f)\big)=0$.

הוכחה: (א) די אינטואיטיבי, וההוכחה טריויאלית לחלוטין מההגדרות.

את הוכחה (ב) לא נעשה בכיתה.. ☹ תרגיל בית! ☺

הגדרה: אופרטור לפלס (לפלסיאן) $\Delta: C^2(\Omega)\to C^0(\Omega)$ שמוגדר ע"י $\Delta\varphi=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial j^2}$ ומתוך כך מתקיים תמיד כי $\Delta\varphi=div\big(grad(\varphi)\big)=\nabla\cdot\nabla(\varphi)=\nabla^2\varphi$. נסמן $\Delta=\nabla^2$.

הגדרה: נגדיר $\Delta: C^2(\Omega)^n\to C^0(\Omega)^n$ ע"י $\Delta f=(\Delta f_1,\ldots,\Delta f_n)$.

- הערה: מתקיים עבור $n=3$ כי $\Delta f=grad\big(div(f)\big)-curl\big(curl(f)\big)$.

i,j,k הבסיס הרגיל ב-$\mathbb{R}^3$. נניח ש-i',j',k' בסיס אורתונורמלי אחר ב-$\mathbb{R}^3$ עם מטריצת מעבר $A=\{a_{ij}\}$

ז"א ש: $i'=a_{11}i+a_{12}j+a_{13}k\ ,j'=a_{21}i+a22j+a_{23}k\ ,k'=a_{31}i+a_{32}j+a_{33}k$.

כאן A היא אורתו-נורמלית, ז"א ש-$A^{-1}=A^t$.

נרשום ש-$P=(x,y,z)=(x',y',z')$ וגם $f(P)=F(x,y,z)=G(x',y',z')$

<u>למה</u>: מתקיים ש-$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)i+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)j+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)k=\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,z)i'+\frac{\partial G}{\partial y}(x,y,z)j'+\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z)k'$.

ידוע כי $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ או"א $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^t\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.

לכן מתקיים $G(x',y',z')=f(a_{11}x'+a_{21}y'+a_{31}z',a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z',a_{31}x'+a_{23}y'+a_{33}z')$

לפי כלל השרשת נקבל $\frac{\partial G}{\partial x'} = a_{11}\frac{\partial f}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial f}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial f}{\partial z}$, ובאופן דומה עבור $\frac{\partial G}{\partial z'}$, $\frac{\partial G}{\partial y'}$.

לסיכום, נקבל ש: $\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x'} \\ \frac{\partial G}{\partial y'} \\ \frac{\partial G}{\partial z'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$. מ.ש.ל. ■