

פתרון תרגיל 8

1. א. תהיינה:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן A_1 ו- A_2 מטריצות נילפוטנטיות (מאינדקס 2).
המטריצה $A_1 + A_2$ היא המטריצה:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$(A_1 + A_2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ולכן:

$$(A_1 + A_2)^k = I \neq 0 \quad k=2,3,\dots$$

הווה אומר - $A_1 + A_2$ אינה נילפוטנטית.
המטריצה $A_1 A_2$ היא:

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$(A_1 A_2)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad k=1,2,\dots$$

הווה אומר - $A_1 A_2$ איננה נילפוטנטית.

ב. תהיינה A_1, A_2 מטריצות מתחלפות. אז נוכל לרשום:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)^2 &= A_1^2 + A_1 A_2 + A_2 A_1 + A_2^2 = \\ &= A_1^2 + 2A_1 A_2 + A_2^2 \end{aligned}$$

ובאופן כללי:

$$(A_1 + A_2)^n = A_1^n + C_n^1 A_1^{n-1} A_2 + \dots + A_2^n =$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k A_1^k A_2^{n-k}$$

אם A_1 ו- A_2 מטריצות נילפוטנטיות, אז קיימים מספרים p_1 ו- p_2 כך ש- $A_1^{p_1} = 0$, $A_2^{p_2} = 0$. יהי $m = \max(p_1, p_2)$ ו- $n > m$:

$$A_1^k = A_2^k = 0, \quad k \geq m$$

עתה, נעיון בנוסחה הבינום שלעיל ונשים לב, שאם $n = 2m$, אז $k \geq m$ או ש- $n-k = 2m-k \geq m$. על כל פנים לכל k ($k=0, \dots, 2m$) אחד מן הגורמים A_1^k או A_2^{2m-k} שווה לאפס, ולכן $(A_1 + A_2)^{2m} = 0$. עבור $A_1 A_2$ ההוכחה פשוטה יותר. מאחר ש- A_1 ו- A_2 מתחלפות הרי:

$$(A_1 A_2)^n = A_1^n A_2^n$$

ולכן אם נבחר $n = \min(p_1, p_2)$ ונקבל כי $A_1^n = 0$ או $A_2^n = 0$, ולכן גם $(A_1 A_2)^n = 0$.

ג. תהי T טרנספורמציה נילפוטנטית מאינדקס r , כלומר $T^r = 0$ אך $T^{r-1} \neq 0$. נגדיר:

$$S = \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \dots + \alpha_n T^n =$$

$$= T(\alpha_1 I + \alpha_2 T + \dots + \alpha_{n-1} T^{n-1}) =$$

$$= TP(T)$$

מאחר ש- T ו- $P(T)$ טרנספורמציות מתחלפות, הרי:

$$S^n = [TP(T)]^n = T^n P(T)^n$$

מכאן נובע כי:

$$S^r = T^r P(T)^r = 0 \cdot P(T)^r = 0$$

ולכן S נילפוטנטית ואינדקס הנילפוטנטיות שלה קטן או שווה ל- r .

א. על-פי הנתון $T^k=0$ ו- $T^{k-1} \neq 0$, ולכן T מאפסת את הפולינום t^k . אם $M(t)$ הפולינום המינימלי של T , אז $M(t)$ מחלק את t^k , ולכן $M(t)=t^i$ כאשר $1 \leq i \leq k$. לא ייתכן ש- $i < k$, שכן אז היה $T^i=0$ ($i < k$), בסתירה לכך ש- $T^{k-1} \neq 0$. הווה אומר - הפולינום המינימלי של T הוא t^k .

ב. אילו היה קיים $v \in V$ כן $v \neq 0$ ש- $Tv = \lambda v$ ($\lambda \neq 0$), אז:

$$T^k v = \lambda^k v \quad k=1, 2, \dots$$

ולכן $T^k v \neq 0$, כלומר T^k אינה טרנספורמציה האפסת לכל k , בסתירה לנתון.

ג. ההוכחה נובעת מן השוויון:

$$[T^k] = [T]^k \quad k=1, 2, \dots$$

ד. שתי מטריצות דומות מייצגות אותה טרנספורמציה לינארית, ולכן לשתיהן אותו אינדקס נילפוטנטיות השווה (על-פי חלק ג) לאינדקס הנילפוטנטיות של הטרנספורמציה. הוכחה אחרת: אם $B = P^{-1}AP$, אז $B^k = P^{-1}A^kP$, לכן $0 = B^k$ אם ורק אם $A^k = 0$. ומכאן נובעת הטענה.

מחישב מראה כי $A^2=0$, ולכן בלוק זיורדן הגדול ביותר בצורת זיורדן של A הוא J_2 . מכאן נובע שצורת זיורדן של A היא:

$$\begin{pmatrix} J_2 & & \\ & J_1 & \\ & & \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ג. תהי:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = 0$$

ולכן בלוק זיורדן הגדול ביותר הוא מסדר 3. מכאן שצורת זיורדן של B היא:

$$\begin{pmatrix} J_3 & & \\ & J_2 & \\ & & J_1 \end{pmatrix} \quad \text{או} \quad \begin{pmatrix} J_3 & & \\ & J_1 & \\ & & J_1 \end{pmatrix}$$

כדי להכריע איזו משתי המטריות הללו היא צורת זיורדן של B נחשב את דרגת B . B היא מטריצת מדרגות, ולכן דרגתה שווה למספר שורות לא אפסיות, דהיינו $\rho(B)=2$. על-פי טענה מספר בלוקי זיורדן שווה ל- $\rho(B)=2=5-3$, ולכן צורת זיורדן של B היא:

$$\begin{pmatrix} J_3 & & \\ & J_1 & \\ & & J_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & 0 \\ & & & 0 \end{array} \right)$$

ג. תהי:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כדי לחשב את החזקות של C נמייחס אליה כאל הטרנספורמציה $T: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ הפועלת על איברי הבסיס הסטנדרטי כלהלן:

$$Tv_1 = \theta, Tv_2 = v_1, Tv_3 = v_2$$

$$Tv_4 = v_1 + v_3, Tv_5 = v_2 + v_4, Tv_6 = v_1 + v_3$$

מכאן:

$$T^2v_1 = \theta, T^2v_2 = Tv_1 = \theta, T^2v_3 = Tv_2 = v_1$$

$$T^2v_4 = Tv_1 + Tv_3 = v_2, T^2v_5 = Tv_2 + Tv_4 = 2v_1 + v_3$$

$$T^2v_6 = Tv_1 + Tv_3 = v_2$$

ולכן, $T^2 \neq 0$. נמשיך:

$$T^3v_1 = \theta, T^3v_2 = T^2v_1 = \theta, T^3v_3 = Tv_1 = \theta$$

$$T^3v_4 = Tv_2 = v_1, T^3v_5 = v_2, T^3v_6 = v_1$$

ולכן $T^3 \neq 0$. נמשיך:

$$T^4v_1 = T^4v_2 = T^4v_3 = T^4v_4 = \theta$$

$$T^4v_5 = Tv_2 = v_1, T^4v_6 = \theta$$

ולכן $T^4 \neq 0$ וברור כי $T^5v_5 = Tv_1 = \theta$ ולכן $T^5 = 0$.
אם כן, C נילפוטנטית מאינדקס 5, ולכן צורת ז'ורדן שלה היא:

$$\begin{pmatrix} J_5 & \\ & J_1 \end{pmatrix}$$

4.

א. יהי $\dim V = 6$, ותהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה נילפוטנטית המקיימת $T^4 = 0$ אך $T^3 \neq 0$. דהיינו, אינדקס הנילפוטנטיות של T הוא 4. צורות זיורדן האפשריות של T (דהיינו של המטריצה $[T]$ המייצגת את T בבסיס כלשהו של V) הן:

$$\text{diag}\{J_4, J_2\}, \text{diag}\{J_4, J_1, J_1\}$$

ב. תהי A מטריצה, שהפולינום האופייני שלה הוא t^5 . הסדר של A שווה למעלת הפולינום האופייני, דהיינו A היא מסדר 5. על-פי משפט קיילי-המילטון $A^5 = 0$, ולכן A נילפוטנטית (מאינדקס ≤ 5). צורות זיורדן-האפשריות עבור A הן:

$$O_{5 \times 5}, \text{diag}\{J_2, J_1, J_1, J_1\}, \text{diag}\{J_2, J_2, J_1\}$$

$$\text{diag}\{J_3, J_2\}, \text{diag}\{J_3, J_1, J_1\}, \text{diag}\{J_4, J_1\}, J_5.$$

5.

תהי A מטריצה מסדר 6 המקיימת $A^5 = 0$ אך $A^4 \neq 0$. צורת זיורדן של A היא:

$$G = \begin{pmatrix} J_5 & \\ & J_1 \end{pmatrix}$$

הדרגה של G שווה ל-4, ולכן גם הדרגה של A שווה ל-4.

6.

נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2$$

בעוד ש-

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

לכן אם:

$$(1) \quad G = \begin{pmatrix} J_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_2 & \\ & & & J_1 & \dots & J_1 \end{pmatrix}$$

אז מתקיים:

$$(2) \quad G = GC$$

$$(3) \quad 0 = CG$$

כאשר:

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}} & \\ & & & 0 \end{array} \right)$$

ההי M מטריצה ריבועית המקיימת $M^2=0$, כלומר אינדקס
הנילפוטנטיות של M קטן או שווה 2, ולכן M דומה למטריצת
ז'ורדן G מהצורה (1) כלומר:

$$M = P^{-1}GP$$

נציב כאן את (2) ונקבל:

$$M = P^{-1}GCP$$

נגדיר $A=P^{-1}G$, $B=CP$ ונקבל כי:

$$M = AB$$

בעוד ש-

$$BA = (CP)(P^{-1}G) =$$

$$= CG = 0$$

↑
(3)

כנדרש.

נתייחס ל- A כאל מטריצה של הטורנספורמציה $T: R^8 \rightarrow R^8$ המקיימת:

$$Tv_1 = Tv_6 = Tv_7 = Tv_8 = 0$$

$$Tv_2 = v_1$$

$$Tv_3 = v_2$$

$$Tv_4 = v_6$$

$$Tv_5 = v_7$$

מכאן נובע כי:

(*) $T^2 v_i = 0 \quad i=1,2,4,5,6,7,8$

$$T^2 v_3 = Tv_2 = v_1$$

ומכאן ש- $T^3=0$. הדרגה של A היא 4, ולכן צורות ז'ורדן האפשריות הן:

$$\text{diag}(J_3, J_3, J_1, J_1) \quad \text{diag}(J_3, J_2, J_2, J_1)$$

~~הצורה הראשונה היא אפשרית כי יש לנו 4 בלוקים של 1x1 ו-2 בלוקים של 3x3~~
~~הצורה השנייה היא אפשרית כי יש לנו 2 בלוקים של 2x2 ו-1 בלוק של 3x3~~
של בלוקי ז'ורדן מסדר 3 - הוא:

$$r_3 = \rho(A^2) - 2\rho(A^3) + \rho(A^4) =$$
$$= \rho(A^2) = 1$$

ולכן צורת ז'ורדן היא:

$$\text{diag}(J_3, J_2, J_2, J_1)$$