הסתברות תרגול - שעור 3

$\leftarrow$ $l=k-y$ נציב. $k=l+y \leftarrow$

$$\frac{e^{-\lambda}p^y}{y!}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^{l+y}\cdot q^l}{l!}$$

טור טיילור $\sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^l}{l!}=e^x$

$$=\frac{e^{-\lambda}(p\cdot\lambda)^y}{y!}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\lambda q)^l}{l!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^y}{y!}e^{\lambda q}=\frac{(\lambda p)^y}{y!}\cdot e^{-\lambda p}$$

$$\Rightarrow Y\sim Pois(\lambda p)$$

$$P(Y=y)=\frac{(\lambda p)^y\cdot e^{-\lambda p}}{y!}$$

שאלה - $Y\sim P(\lambda)$, $X|Y\sim B(Y,P)$

חשבו את $E(X)$, $V(X)$.

פתרון - $E(X)=E_Y(E_{X|Y}(X|Y))=E_Y(Y\cdot P)$

$$=PE_Y(Y)=p\cdot\lambda$$

$$V(X)=E_Y(V_{X|Y}(X|Y))+V_Y(E_{X|Y}(X|Y))$$

$$=E_Y(Y\cdot p\underbrace{(1-p)}_{=q})+V_Y(Y\cdot P)=p\cdot q\,E[Y]+p^2\,V_Y(Y)$$

$$=p\cdot q\cdot\lambda+p^2\cdot\lambda=p\lambda$$

שאלה - 2 כניסות.

מס' כניסות כניסה קדמית ~ $P(\lambda)$

-"- -"- אחורית ~ $P(\mu)$

א) הוכיחו שמס' האנשים שמגיעים בדקה לבנק מתפלג $P(\lambda+\mu)$

ב) בהינתן שהגיעו לבנק בדקה האחרונה 10 אנשים. מהי התפלגות של מס' האנשים שהגיעו דרך הכניסה הקדמית.

פתרון - X= מס' האנשים שנכנסו בקדמית.

Y= -"- -"- -"- באחורית.

Z= -"- -"- שנכנסים לבנק $\Leftarrow Z=X+Y$

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)\underset{\text{הכניסות ב"ת}}{=}\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^i}{i!}\cdot\frac{e^{-\mu}\cdot\mu^{(k-i)}}{(k-i)!}=e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\binom{k}{i}}{k!}\lambda^i\mu^{k-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\underbrace{\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda\mu^{k-i}}_{\text{בינום של ניוטון}}\Rightarrow(\lambda+\mu)^k=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!}=Poiss(\lambda+\mu)$$

הסתברות — תרגיל - 3|4 - 3

ב)

$$P(X=k \mid X+Y=10)=\frac{P(\{X=k\}\cap\{X+Y=10\})}{P(\{X+Y=10\})}$$

$$=\frac{P(\{X=k\}\cap\{Y=10-k\})}{P(X+Y=10)}=\frac{P(X=k)P(Y=10-k)}{P(X+Y=10)}$$

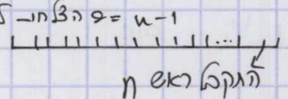
$$=\frac{\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}\cdot\frac{e^{-\mu}\cdot\mu^{10-k}}{(10-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}\cdot(\lambda+\mu)^{10}}{10!}}$$

הסתברות תרגול - 1-115

שאלה - מטילים מטבע עד שמקבלים "ראש" בפעם העשירית.

$X=$ מס' הניסויים שהתבצעו. חשבו את פונקציית הסתברות של X.

פיתרון -



$$P(X=n)=\binom{n-1}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-10}$$

$n\geq 0$ ← הצלחות

שאלה - נתבונן בקבוצה בת n אנשים. נגדיר "יום מיוחד" להיות יום בו בדיוק k אנשים בקבוצה חוגגים יום הולדת. מהי תוחלת הימים המיוחדים בשנה?

פיתרון - נגדיר משפחה של מ"מ - $X_1,\dots,X_{365}$.

כאשר $X_i=1$, אם X_i יום מיוחד ואחרת $X_i=0$ דהיינו X_i משתנה ברנולי.

$$P(X_i=1)=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{365}\right)^k\cdot\left(\frac{364}{365}\right)^{n-k}\quad,P(X_i=0)=1-P(X_i=1)$$

נשים לב שה-X_i למרות שהם שווי התפלגות - הם תלויים.

נגדיר כעת את המשתנה - $X=\sum_{i=1}^{365}X_i$

$X=m$ כאשר יש בדיוק m ימים מיוחדים בשנה.

רוצים למצוא את התוחלת $E(X)$. $E(X)=E(\sum X_i)=\sum E(X_i)=$

$$=1\cdot P(X_i=1)+0\cdot P(X_i=0)=P(X_i=1)=\sum_{i=1}^{365}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k\cdot\left(\frac{364}{365}\right)^{n-k}=365\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{365}\right)^k\cdot\left(\frac{364}{365}\right)^{n-k}$$

ב) נתבונן באותה קבוצה של n אנשים. מהי תוחלת מס' הימים שבהם לפחות ל-2 אנשים יש יום הולדת.

פיתרון - נגדיר שוב - $X_1,\dots,X_{365}$ באופן הבא: לפחות ל-2 אנשים יש יום הולדת $\Leftarrow X_i=1$ או לאדם אחד יש יום הולדת - $X_i=0$ או שאין יום הולדת לאיש.

$$P(X_i=0)=\left(\frac{364}{365}\right)^n+\underbrace{\binom{n}{1}\cdot\left(\frac{1}{365}\right)^1\cdot\left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}}_{(*)}\quad,P(X_i=1)=1-P(X_i=0)$$

$$E(\sum X_i)=\sum E(X_i)=\sum P(X_i=1)=\sum(1-(*))$$

שאלה - מטילים מטבע n פעמים, לקבלת n ביטים אקראיים. נתבונן בכל $m=\binom{n}{2}$ זוגות הביטים. (באיזשהו סדר). יהי Y_i ה- exclusive-or (XOR) של הזוג ה-i.

ויהי - $Y=\sum_{i=1}^{m}Y_i$. בבירור - $P(Y_i=1)=\frac{1}{2},P(Y_i=0)=\frac{1}{2}$.

הראו ש-Y_i תלויים בזוגות.

פיתרון - $P(X_{i_1},X_{i_2},\dots X_{i_k})=P(Y_{i_1})\cdots P(Y_{i_k})$

נתבונן במקרה $n=3$ והסתברות $(*)\ P(Y_1=1,Y_2=1,Y_3=1)=P(Y_1=1)\cdot P(Y_2=1)\cdot P(Y_3=1)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

אבל למעשה - $(*)=0$

הסתברות תרגיל - ת5 - 2

הוכיחו שה-Y_i ב"ת בזוגות — דהיינו- (**) $P(Y_i, Y_j)=P(Y_i)P(Y_j)$

פיתרון- אם ל-Y_i ו-Y_j אין מיקום משותף הם בבירור ב"ת.

אם ל-Y_i ו-Y_j יש מיקום משותף. בידקו את כל הסדרות של 3 ביטים

והוכיחו ש-(**) מתקיים. על מנת להוכיח אי התלות.

מצאו את $var(Y)$.

פיתרון- $$Var(Y)=var\left(\sum_{i=1}^{m} Y_i\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} Var(Y_i)=\sum_{i=1}^{m}\left(0^2\cdot\frac12+1^2\cdot\frac12\right)-\left(0\cdot\frac12+1\cdot\frac12\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac14=\frac{m}{4}=\binom{n}{2}\frac14=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac14$$

אוך, שימוש באי שוויון צ'בישב.

מצאו חסם על - $P(|Y-E(Y)|\geq n)$

צ'בישב- $$P(|X-\mu|\geq a)\leq\frac{\sigma^2}{a^2}$$

$$a=k\sigma\Rightarrow\ P(|X-\mu|\geq k\sigma)\leq\frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}=k^{-2}$$

$$P(|Y-E(Y)|\geq n)\leq\frac{Var(Y)}{n^2}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2\cdot 4}$$

$$=\frac18\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}\leq\frac18$$

שאלה - יהי $Y\sim G\left(\frac34\right)$, חשבו את הערך המדויק ואת חסם צ'בישב להסתברות ש-Y לפחות 2 סטיות תקן מהתוחלת.

פיתרון- $$E(Y)=\frac{1}{\frac34}=\frac43$$

$$V(Y)=\frac{1-P}{P^2}=\frac{\frac14}{\left(\frac34\right)^2}=\frac49$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{\frac49}=\frac23$$

$$P\left(|Y-\tfrac43|\geq 2\cdot\tfrac23\right)=P\left(Y-\tfrac43\geq\tfrac43\right)+P\left(Y-\tfrac43\leq-\tfrac43\right)$$

$$=P\left(Y\geq\tfrac83\right)+P(Y\leq 0)=P(Y\geq 3)=1-\left(P(Y=2)+P(Y=1)\right)$$

$$=1-\underbrace{\left(1-\left(\tfrac14\right)^2\right)}=\frac{1}{16}$$

כל האופציות האחרות
מה שלפני גיאומטרי
מ-חילון ב-2 כשלון.

לפי צ'בישב $$P\left(|Y-E(Y)|\geq\tfrac43\right)\leq\left(\tfrac49\right)\Big/\left(\tfrac43\right)^2=\frac14$$

הסתברות – תרגול - 3-1/15

א"י שיוויון מרקוב - לכל משתנה מקרי $X\geq 0$ ולכל a.

$P(X\geq a)\leq \frac{E(X)}{a}$ (צ'בישב הוא מקרה פרטי של מרקוב).

שאלה - יהא X מס' הפעמים שיוצא 6 בהטלת קוביה, n הטלות.

תהי - $P=P(X\geq \frac{n}{4})$. חשבו חסמים בעזרת מרקוב וצ'בישב.

פיתרון -
$$P\left(X\geq \frac{n}{4}\right)\leq \frac{E(X)}{\left(\frac{n}{4}\right)}=\frac{\frac{n}{6}}{\frac{n}{4}}=\frac{2}{3}$$
$$E(X)=n\cdot\frac{1}{6}=\frac{n}{6}\qquad X\sim Bin\left(n,\frac{1}{6}\right)$$

לפי ~~צ'בישב~~ -
$$P\left(X>\frac{n}{4}\right)\leq P\left(|X-E(X)|\geq \frac{n}{4}\right)$$
$$\cancel{P\left(\left|X-\frac{n}{6}\right|\geq \frac{n}{4}\right)}=P\left(X\geq \frac{n}{6}+\frac{n}{4}\right)+P\left(X\leq \frac{n}{4}-\frac{n}{6}\right)$$
$\Leftarrow$ שיעור הבא נמשיך.

שאלה - 80 מדרגות עד הגג. עולה מס' מדרגות השווה למס' שהתקבל בהטלת קוביה. ניתן לבצע את התהליך לכל היותר 20 פעם. תנו הערכה להסתברות שיצליח להגיע לגג.

פיתרון - בהטלת קוביה. התוחלת $=3.5=\frac{n+1}{2}$, והשונות היא $=\frac{35}{12}=\frac{n^2-1}{12}$

מאחר והטלות הקוביה ב"ת זו בזו נקבל:

$X=\sum_{i=1}^{20}X_i$ מס' המדרגות שעלה. $\Rightarrow E(X)=E(\sum X_i)=\sum E(X_i)=\sum_{i=1}^{20}3.5=20\cdot 3.5=70$

$$V(X)=V(\sum X_i)=\sum V(X_i)=\sum_{i=1}^{20}\frac{35}{12}=58\tfrac{1}{3}$$
$$P(\text{יגיע לגג})=P(X\geq 80)=P(X-70\geq 10)\leq P(|X-70|\geq 10)\leq \frac{58\frac{1}{3}}{100}=\frac{7}{12}$$

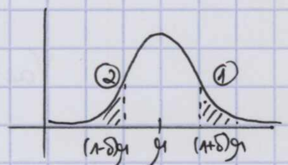
נשים לב שההתפלגות של X סימטרית לכן סביב התוחלת -
$$P(X-70\geq 10)=\frac{1}{2}P(|X-70|\geq 10)\Rightarrow \frac{1}{2}P(|X-70|\geq 10)\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{58\frac{1}{3}}{100}=\frac{7}{24}$$

הסתברות - תרגול - 8/5 - 1

אי שוויון צ'רנוף - יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ בלתי תלויים.

$X_i \sim Ber(p_i)$ אזי עבור - $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu=E(X)$ מתקיים שלכל $0<\delta<1$:

1. $P(X\ge(1+\delta)\cdot\mu)\le e^{-\frac{\delta^2\mu}{3}}$
2. $P(X\le(1-\delta)\cdot\mu)\le e^{-\frac{\delta^2\mu}{2}}$



שאלה - רינה ויוסי משחקים טורניר של n משחקי שח.

לרינה יש הסתברות של 0.6 לנצח במשחק. חסמו את ההסתברות שרינה תפסיד בטורניר באמצעות חסם צ'רנוף.

פיתרון - רינה תפסיד בטורניר אם היא מנצחת פחות ממחצית המשחקים.

אם X - מס' הניצחונות של רינה, אז אנו רוצים למצוא את: $P(X\le\frac{n-1}{2})$

$$P(X\le(1-\delta)E(X))\le e^{-\frac{E(X)\delta^2}{2}}$$

במקרה שלנו - $E(X)=n\cdot p=n\cdot 0.06=\frac{3n}{5}$

דהיינו צריך להתקיים $(1-\delta)\mu=a\ge\frac{n-1}{2}$

$$(1-\delta)\frac{3n}{5}\ge\frac{n-1}{2}$$

$$(1-\delta)\ge\frac{(n-1)5}{3n\cdot 2}$$

$$\underbrace{1-\frac{5}{6}\left(\frac{n-1}{n}\right)}_{\text{f(n) פונקציה יורדת}}\ge\delta$$

$\frac{1}{3}\ge\delta \leftarrow n\ge 5$

$$P(X\le\frac{n-1}{2})\le P(X\le a)\le e^{-\frac{\delta^2\mu}{2}}\le e^{-\frac{(\frac{1}{3})^2\cdot\frac{3n}{5}}{2}}=e^{-\frac{n}{30}}$$

שאלה - יהי X מס' הפעמים שיוצא 6 ב-n הטלות קוביה.

תהי - $P=P(X\ge\frac{n}{4})$. חשבו את כל החסמים (מרקוב, צ'רנוף, צ'בישב) עבור P.

פיתרון - צ'רנוף -

$$P=P(X\ge\frac{n}{4})=P(X\ge(1+\delta)\mu)\le e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}}$$

$\mu=E(X)=\frac{n}{6}$ (בינומי), $\frac{n}{4}=(1+\delta)\mu=(1+\delta)\frac{n}{6}$

$\Downarrow$

$\delta=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow P\le e^{-\frac{(\frac{n}{6})\cdot(\frac{1}{2})^2}{3}}=e^{-\frac{n}{72}}$$

מרקוב -

$$P(X\ge t)\le\frac{E(X)}{t}=\frac{\mu}{t}$$

$$P(X\ge\frac{n}{4})\le\frac{(\frac{n}{6})}{(\frac{n}{4})}=\frac{2}{3}$$

הסתברות — תרגול - 8/5 - 2

צ'בישב - $P(X\ge \frac{n}{4})=P(X-\mu\ge \frac{n}{4}-\mu)=\{\mu=\frac{n}{6}\}$

$$=P(X-\frac{n}{6}\ge \underbrace{\frac{n}{4}-\frac{n}{6}}_{\frac{n}{12}})\le P(|X-\frac{n}{6}|\ge\frac{n}{12})\le \frac{Var(X)}{(\frac{n}{12})^2} \Rightarrow (*)$$

שונות של משתנה בינומי $\Leftarrow (n,\frac{1}{6})$ - $Var(X)=n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5n}{36}$

(כעת להתייחס לצ'רנוף). $(*)\Rightarrow \frac{n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{(\frac{n}{12})^2}=\frac{20}{n}$

עבור $n\ge30$, ניקח חסם צ'בישב ועבור $n\le30$ ניקח מרקוב.

שאלה - תוך שימוש באי שוויון צ'רנוף מצאו חסם לביטוי. $(\varepsilon>0)$

$$P(|X-\mu|\ge\varepsilon\mu)=P(X-\mu\ge\varepsilon\mu)+P(X-\mu\le-\varepsilon\mu)=$$

$$=P(X\ge(\varepsilon+1)\mu)+P(X\le(1-\varepsilon)\mu)\le e^{-\frac{\varepsilon^2\mu}{3}}+e^{-\frac{\varepsilon^2\mu}{2}}\le$$

$$\le 2\cdot e^{-\frac{\varepsilon^2\mu}{3}}$$

$g(E(X))\le E(g(X))$ - עבור פונקציה g קמורה. ← א"ש ינסן.

" $\ge$ " - עבור פונקציה g קעורה.

שאלה - יהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מ"מ אי-שליליים ובלתי תלויים בעלי תוחלת ושונות זהים וסופיים.

נגדיר $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, הוכיחו: שעבור כל $\varepsilon>0$ - $\lim_{n\to\infty}P(|\frac{S_n}{E(S_n)}-1|\ge\varepsilon)=0$.

פיתרון $E(S_n)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=nE(X_1)$

נשתמש בא"ש צ'בישב לצורך כך.

עלינו לחשב - $Var(S_n)=Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=n\cdot Var(X_1)$

$$P(|\frac{S_n}{E(S_n)}-1|\ge\varepsilon)=P(\frac{|S_n-E(S_n)|}{E(S_n)}\ge\varepsilon)=P(|S_n-E(S_n)|\ge E(S_n)\cdot\varepsilon)$$

$$=\frac{Var(S_n)}{\varepsilon^2\cdot E(S_n)^2}=\frac{n\cdot Var(X_1)}{\varepsilon^2\cdot n^2\cdot E(X_1)^2}=\frac{1}{n}\cdot\overbrace{\frac{Var(X_1)}{\varepsilon^2\cdot E(X_1)^2}}^{\text{סופי}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$