תרגיל 2 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. האם קיים שיכון איזומטרי בין המרחבים הבאים? הוכיחו או הפריכו.

(א) $\{\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5} \mid n\in\mathbb{N}\}\to\mathbb{Q}\cap(2016,\infty)$ (המטריקות כאן הן $d(x,y)=|x-y|$)

פתרון: קיים. למשל נגדיר פונקציה לפי

$$f(x)=\sqrt{3}-x+2016$$

ואז אכן

$$f(\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5})=\frac{n}{2n+5}+2016\in\mathbb{Q}\cap(2016,\infty)$$

בנוסף זה שיכון איזומטרי מפני ש

$$\begin{aligned}|f(\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5})-f(\sqrt{3}-\frac{m}{2m+5})| &= |\frac{n}{2n+5}+2016-(\frac{m}{2m+5}+2016)|\\ &= |\frac{n}{2n+5}-\frac{m}{2m+5}|\\ &= |\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}-(\sqrt{3}-\frac{m}{2m+5})|\end{aligned}$$

(ב) $(\mathbb{Z},d_5)\to(\mathbb{Z},d_7)$

פתרון: לא קיים. נניח בשלילה שקיים שיכון איזומטרי f.

$$d_5(5,0)=\frac{1}{5}$$

ולכן

$$d_5(f(5),f(0))=\frac{1}{5}$$

אבל ב $(\mathbb{Z},d_7)$ אין אף זוג נקודות שהמרחק ביניהם הוא $\frac{1}{5}$ (מרחקים הם 0 או $\frac{1}{7^k}$). סתירה.

2. יהי (X,d) מרחב מטרי.

(א) הוכיחו כי לכל $x\in X$ מתקיים כי $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X.

פתרון: נוכיח כי המשלים קבוצה פתוחה. יהי $y\neq x$ צריך להוכיח שיש $r>0$ כך ש $x\notin B(y,r)$. אז אפשר לקחת $r=\frac{d(x,y)}{2}$.

(ב) תנו דוגמא נגדית לסעיף א' אם X הוא רק מרחב פסאודו מטרי.

פתרון: אפשר לקחת פשוט את הפסאודו מטריקה $d(a,b)=0$ לכל $a,b\in X$ ואז x יהיה מוכל בכל כדור פתוח ולכן בכל קבוצה פתוחה. ולכן המשלים של $\{x\}$ היא לא קבוצה פתוחה (הערה: במרחב הזה הקבוצות הסגורות/הפתוחות היחידות הן $\emptyset,X$)

(ג) הוכיחו כי כל קבוצה סופית היא סגורה.

פתרון: מיידי כי כל נקודה היא קבוצה סגורה ואיחוד של מספר סופי של קבוצות סגורות היא גם קבוצה סגורה.

(ד) הוכיחו כי כל כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

פתרון: נסתכל על הכדור הסגור $B[x,r]$. צריך להוכיח שהוא קבוצה סגורה. נוכיח שהמשלים

$$(B[x,r])^c = \{y \in X \mid d(y,x) > r\}$$

היא קבוצה פתוחה, ניקח איזשהוא $y \in (B[x,r])^c$. צריך למצוא $t > 0$ כך ש

$$B(y,t) \subseteq (B[x,r])^c$$

נבחר

$$t = d(x,y) - r$$

ואכן אם $z \in B(y,t)$ אז

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < d(x,z) + t = d(x,z) + d(x,y) - r$$

ולכן

$$d(x,z) > r$$

כלומר

$$z \in (B[x,r])^c$$

כנדרש.

3. נביט על המרחב $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ של המספרים האי רציונלים עם המטריקה הסטנדרטית של $\mathbb{R}$. הראו כי הוא לא קשיר (למשל, הסתכלו על קבוצת האי רציונליים החיוביים, האם היא פתוחה? האם היא סגורה?).

פתרון: נסמן ב A את קבוצת האי רציונליים החיוביים. משלימתה היא קבוצת האי רציונליים השליליים (0 הרי רציונלי). אם נראה כי שתי קבוצות אלה הן פתוחות אז נובע מייד שהמרחב לא קשיר. אבל הן באמת פתוחות משום ש $(0,\infty)$ קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}$ ולכן $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,\infty)$ פתוחה ב $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. באופן דומה קבוצת השליליים פתוחה כי $(-\infty,0)$ פתוחה ב $\mathbb{R}$.

הערה: למעשה המרחב הזה לא סתם לא קשיר, אלא בלתי קשיר לחלוטין. כלומר, לכל שתי נקודות $x,y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ אפשר למצוא קבוצה פתוחה וסגורה A כך ש $x \in A$ ו $y \notin A$. המרחב $(0,1) \cup (2,3)$ הוא לא קשיר אבל לא בלתי קשיר לחלוטין.

4. הוכיחו שבמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ כל כדור פתוח שמרכזו באפס $B(0,r)$ הוא קבוצה סגוחה ותת חבורה.

פתרון: ברור שזו קבוצה פתוחה (כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה). נוכיח שזו גם קבוצה סגורה. אם $r \geq 1$ אז הכדור הזה הוא כל $\mathbb{Z}$ וזו בוודאי קבוצה סגורה ותת חבורה. אחרת קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש

$$\frac{1}{p^{m+1}} \leq r < \frac{1}{p^m}$$

נבחר t כך ש

$$r < t < \frac{1}{p^m}$$

ואז קל לבדוק ש

$$B(0,r) = B[0,t]$$

(כי אין 2 נקודות שהמרחק שלהן ממש בין $\frac{1}{p^m}$ ו $\frac{1}{p^{m+1}}$ - אם המרחק של x מ 0 קטן שווה t הוא יהיה קטן שווה $\frac{1}{p^{m+1}}$ ולכן קטן מ r) ולכן $B(0,r)$ גם קבוצה סגורה כי זה גם כדור סגור.

נותר להוכיח שזו תת חבורה. אבל אם $x,y \in B(0,r)$ זה אומר ש

$$\frac{1}{p^{k(0,x)}} < r, \quad \frac{1}{p^{k(0,y)}} < r$$

כאשר כזכור $k(a,b)$ היא החזקה הגבוה ביותר α שעבורה $p^\alpha \mid a-b$. עכשיו נשים לב ש

$$k(0,x+y) \geq \min\{k(0,x), k(0,y)\}$$

כי אם $p^\alpha \mid x$ ו $p^\alpha \mid y$ אז $p^\alpha \mid x+y$ ולכן

$$\frac{1}{p^{k(0,x+y)}} < r$$

כלומר

$$x+y \in B(0,r)$$

כנדרש.

5. יהי X המרחב המטרי של כל הסדרות מעל $\mathbb{R}$. המטריקה היא $d(a_n,b_n) = \frac{1}{m}$ כאשר m הוא האינדקס המינימלי שבו $a_m \neq b_m$. (כמובן אם הסדרות זהות המרחק הוא 0).

(א) הוכיחו כי קבוצת הסדרות המתחילות ב $0,1,2$ או ב $3,4,5,6$ היא קבוצה פתוחה.

פתרון: נשים לב שקבוצת הסדרות המתחילות ב $0,1,2$ היא הכדור הפתוח שמרכזו ב $0,1,2,0,0,0,0,\ldots$ ורדיוסו $\frac{1}{3}$ כי ההבדל בין הסדרות יכול להתחיל באיבר הרביעי ולכן המרחק הוא לכל היותר $\frac{1}{4}$.

בדומה הסדרות שמתחילות ב $3,4,5,6$ זה כדור פתוח עם רדיוס $\frac{1}{4}$. איחודן הוא עדיין פתוח.

הערה: למעשה קל לבדוק שזוהי קבוצה סגוחה.

(ב) הוכיחו כי קבוצת הסדרות הקבועות היא קבוצה סגורה.
פתרון: נוכיח שמשילמתה פתוחה. תהי a_n סדרה לא קבועה. כלומר קיימים $a_i \neq a_j$. בלי הגבלת כלליות $i < j$. אז קבוצת כל הסדרות שמתחילות ב

$$a_1, \ldots, a_j$$

היא כדור פתוח (כמו בסעיף הקודם). וכדור זה כמובן לא מכיל אף סדרה קבוצה. זה מה שרצינו.

6. קבעו אילו מהמטריקות הבאות שקולות על $\mathbb{Z}$?

(א) d_5.

(ב) d_7.

(ג) מטריקה $0-1$ כלומר

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

(ד) והמטריקה המושרית מהמטריקה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$ (כלומר $d(x, y) = |x-y|$).
פתרון: לפי d_5 הסדרה 5^n מתכנסת ל 0 אבל זה לא נכון לפי שאר המטריקות ולכן d_5 לא שקולה לאחרות. כנ"ל d_7. שתי המטריקות האחרונות דווקא כן שקולות. במטריקה $0-1$ כל נקודה היא קבוצה פתוחה (כי היא כדור ברדיוס חצי סביב הנקודה) ולכן כל קבוצה היא פתוחה (בתור איחוד פתוחות). בדומה גם לפי המטריקה הסטנדרטית, לכל $n \in \mathbb{Z}$ הקבוצה $\{n\}$ היא קבוצה פתוחה כי היא הכדור הפתוח

$$B(n, \frac{1}{2})$$

ולכן כל קבוצה היא פתוחה כאיחוד של פתוחות.

7. נגדיר את S להיות קבוצת הסדרות הממשיות שהטור שלהן מתכנס בהחלט, כלומר

$$S = \{a_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$$

נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות:

$$d(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

$$\rho(a_n, b_n) = \sup\{|a_n - b_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

האם המטריקות שקולות? הוכיחו.
פתרון: לא. ניקח את הסדרה

$$a_1 = (1, 0, 0, \ldots)$$

$$a_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots)$$

$$a_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots)$$

ובאופן כללי

$$a_n = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$$

קל לראות שלפי מטריקה ρ מתקיים $a_n \to 0$ אבל לפי מטריקה d דווקא $d(a_n, 0) = 1$ לכל n. לכן המטריקות לא שקולות

8. יהי (X, d) מרחב מטרי. נגדיר $\rho : X \to \mathbb{R}$ לפי

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

(א) הוכיחו כי ρ היא מטריקה.
פתרון: קל לוודא ש $\rho(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = y$ וקל לוודא סימטריות. לגבי אי שוויון המשולש. צריך להוכיח

$$\min\{1, d(x, z)\} \leq \min\{1, d(x, y)\} + \min\{1, d(y, z)\}$$

נפצל לכמה מקרים
אפשרות א':

$$\min\{1, d(x, z)\} = 1$$

ואז אם בצד ימין אחד המינימומים הוא 1 אז האי שוויון מיידי. אחרת

$$1 \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

כנדרש.
אפשרות ב':

$$\min\{1, d(x, z)\} = d(x, z)$$

כלומר

$$d(x, z) \leq 1$$

שוב אם בצד ימין אחד המינימומים הוא 1 אז האי שוויון מיידי. אחרת זה פשוט אי שוויון המשולש.

(ב) הוכיחו כי ρ ו d שקולות.

פתרון: נוכיח לפי התכנסות סדרות. נניח ש $x_n \to x$ לפי d כלומר $d(x_n,x) \to 0$. אז בוודאי החל משלב מסוים

$$d(x_n,x) \le 1$$

ולכן

$$\rho(x_n,x) = \min\{1, d(x_n,x)\} \to 0$$

מצד שני אם $x_n \to x$ לפי ρ, כלומר

$$\min\{1, d(x_n,x)\} \to 0$$

אז בהכרח מתקיים שהחל משלב מסוים

$$\min\{1, d(x_n,x)\} \le \frac{1}{2}$$

ולכן

$$d(x_n,x) \le 1$$

כלומר החל משלב מסוים

$$d(x_n,x) = \rho(x_n,x)$$

ולכן

$$d(x_n,x) \to 0$$

(ג) הסיקו שכל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.

פתרון: ρ אכן חסומה על ידי 1