תרגיל 8 – פתרון

1.

נציב במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & k \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 + 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & k+3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{3}{7}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & k+3 \\ 0 & 0 & \frac{30}{7} + \frac{3}{7}k \end{pmatrix}$$

$$\frac{30}{7} + \frac{3}{7}k \neq 0 \Rightarrow k \neq -10$$

2. מצורף בקובץ נפרד.

3.

תשובה : השאלה היא האם בעצם קיימים סקלרים $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ שכולם שונים מ-0 כך ש: $\alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_2 + v_3) + \gamma(v_1 + v_3) = 0$?

נפתח את הסוגריים ונקבץ איברים דומים ונקבל : $(\alpha + \gamma)v_1 + (\alpha + \beta)v_2 + (\beta + \gamma)v_3 = 0$.

אבל הרי אנחנו יודעים ש v_1, v_2, v_3 **הם בת"ל (כלומר קיים רק צ"ל טריוויאלי שנותן את וקטור ה-0)** ולכן זה אומר ש : $\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ ומכן אם תפתרו את המערכת תקבלו ש :

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ מה שאומר שגם $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ הם בת"ל.

4.

(א) האם $1 \in span(S)$?

פתרון: ש"ל האם ל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ יש פתרון. נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ויש פתרון ולכן התשובה היא כן

(ב) מצא $span(S)$ (אלו תנאים $p = a + bx + cx^2 + dx^3 \in span(S)$ צריך לקיים)

פתרון: נדרג →

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & -1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 2 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & -2 & d-a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 4 & c+a-2b \\ 0 & 0 & 0 & d-b \end{array}\right)$$

ולכן יש פתרון רק אם $b - d = 0$

כלומר $span(S) = \{a + bx + cx^2 + dx^3 | b - d = 0\} = \{a + bx + cx^2 + bx^3\}$

(ג) האם S בת"ל ?

פתרון: נציב בוקטור הפתרון את וקטור האפס (שמייצג את פולינום האפס) ונקבל לאחר דירוג:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ שזה גורר שרק הפתרון הטרוויאלי פותר את המערכת

כלומר S בת"ל.

5.

תחילה עלי להקדים ולומר שהסימן $\cap$ ששמו בשפה מתמטית **"חיתוך"** - משמעו הוא האיברים המשותפים כלומר כשעושים חיתוך בין שתי קבוצות לוקחים בעצם את מה שמשותף לשתיהן.
לדוגמא : $\{1,2,3\}\cap\{2,3,4\}=\{2,3\}$
הסימן $\cup$ שמו הוא "איחוד" משמעו הוא לקחת את כל האיברים שנמצאים בשתי הקבוצות ולאחד אותם לקבוצה אחת, לדוגמה : $\{1,2,3\}\cup\{2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$.

כעת ניתן דוגמה נגדית . כשאנו רוצים להפריך טענה מספיק לתת דוגמה נגדית אחת וזה מספיק.

ניקח את הדוגמה הבאה : $A=\{(0,1)\}, B=\{(0,2)\}, V=\mathbb{R}^2$.
נחשב :
ציר ה-X= $sp(A)=sp\{(0,1)\}=\{t(0,1)\mid t\in\mathbb{R}\}$
ציר ה-X= $sp(B)=sp\{(0,2)\}=\{t(0,2)\mid t\in\mathbb{R}\}$.

בסה"כ נקבל $sp(A)\cap sp(B)$ =ציר הX.

מצד שני, כיון ש ל A ול B אין אף איבר משותף, נקבל: $sp(A\cap B)=sp(\phi)=\vec{0}$. ולכן קיבלנו סתירה.