מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 4

<u>תזכורת: (היה בתרגול)</u>

<u>הגדרה.</u> יהי M מרחב מטרי ויהי $\varepsilon > 0$. תת-קבוצה $A \subseteq M$ נקראת *<u>ε–רשת</u>* ב- M אם לכל $x \in M$ קיימת נקודה $a \in A$ כך ש- $d(x,a) < \varepsilon$,
או בצורה אחרת: $M = \cup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.
<u>הגדרה.</u> מרחב מטרי M נקרא *<u>חסום לחלוטין</u>* אם לכל $\varepsilon > 0$ ב-M קיימת ε–רשת סופית, כלומר קיימות נקודות $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ כך ש- $M = \cup_{k=1}^{n} B(a_k, \varepsilon)$.

1. יהי M מרחב מטרי קומפקטי.
א') להוכיח ש- M מרחב מטרי שלם. (<u>הערה.</u> עשינו את זה בשיעור אבל כדאי לחשוב ולרשום באופן מפורט.)
ב') להוכיח ש- M מרחב מטרי חסום לחלוטין.

2. <u>הגדרה.</u> יהיו $(X, d_X), (Y, d_Y)$ מרחבים מטריים. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת *<u>רציפה במידה שווה</u>* אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים:
$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

יהיו X, Y מרחבים מטריים. <u>להוכיח</u>:
א') אם פונקציה $f: X \to Y$ רציפה במידה שווה היא רציפה.
ב') אם X קומפקטי אז פונקציה רציפה $f: X \to Y$ היא רציפה במידה שווה.
(<u>רמז</u>: ולהשתמש במוסג "מספר לבג של כיסוי")

3. יהיו X, Y **מרחבים טופולוגיים** ו-$f: X \to Y$ פונקציה.
להוכיח: f רציפה אם ורק אם היא רציפה בכל נקודה $p \in X$.

4. יהי X מרחב טופולוגי.
א') יהי $A \subseteq B \subseteq X$. <u>להוכיח</u> שלהשרות טופולוגיה:
   - ישירות מ-X ל-A או
   - קודם להשרות טופולוגיה מ-X ל-B ולאחר מכן מ-B ל-A -

זה אותו דבר.
ב') להראות שאם $X \subseteq A \subseteq F$ ו-F סגורה ב-X , אז F סגורה ב-A .
ג') להראות שאם $X \subseteq A \subseteq F$ ו-F סגורה ב- A ו-A סגורה ב- X
אז F סגורה ב-X .

5. יהיו τ_1,τ_2 שתי טופולוגיות בקבוצה X כך ש-$\tau_1 \subseteq \tau_2$
ו- σ_1,σ_2 שתי טופולוגיות בקבוצה Y כך ש-$\sigma_1 \supseteq \sigma_2$.
להוכיח: אם פונקציה $f:(X,\tau_1)\to(Y,\sigma_1)$ רציפה
אז פונקציה $f:(X,\tau_2)\to(Y,\sigma_2)$ רציפה.
(הערה. מבחינת תורת הקבוצות זאת אותה פונקציה $f: X\to Y$.
אבל הסימון כמו $f:(X,\tau_1)\to(Y,\sigma_1)$ מדגיש שרציפות של פונקציה תלויה בטופולוגיות של תחום וטווח שלה.)

6. האם קיים הומאומורפיזם בין המרחבים טופולוגיים $[0,\infty)$ ו-$(0,1]$ (עם תופולוגיות המושרות מ- $\mathbb{R}$ כמרחב אוקלידי) ? אם כן - לתת דוגמה להומאומורפיזם.