תרגיל 5

2 בדצמבר 2012

1. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית ($A \in M_4(\mathbb{R})$). מצא $V, W \subseteq \mathbb{R}^4$ תתי מרחבים אינווריאנטיים תחת כפל ב A עם מימד 2 כך ש $V \bigoplus W = \mathbb{R}^4$. יש לפתור את התרגיל בלי להסתמך על תרגיל 2.

   (רמז: חשב את הפולינום האופייני של A והתייחס אל A כאל מטריצה מרוכבת).

2. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, $f(\lambda)$ פולינום האופייני של A, $f = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$ כאשר p_1, p_2 הם פולינומים זרים, כלמר $gcd(p_1, p_2) = 1$. נסמן $V = \mathbb{F}^n$.

   (א) נסמן $T_i(v) := P_i(A)v$, $W_i = \ker T_i$ הוכח: לכל i, W_i הוא מרחב אינווריאנטי תחת כפל ב A.

   (ב) הוכח $V = W_1 \bigoplus W_2$. (תזכורת: מאלגוריתם אוקלידס של חילוק פולינומים נובע שאם p_1, p_2 הם פולינומים זרים, אזי קיימים פולינומים f_1, f_2 כך ש $f_1p_1 + f_2p_2 = 1$).

3. יהי V מרחב וקטורי, $W \subseteq V$ ת"מ.

   (א) הוכח קיים $W' \subseteq V$ כך ש $W \bigoplus W' = V$.

   (ב) נגדיר הטלה $P : V \mapsto V$ באופן הבא: עבור $w \in W, w' \in W'$ אנו נגדיר $P(w + w') = w$.
   יהי $T : V \mapsto V$ אופרטור. הוכח: W הוא אינווריאנטי תחת T אם ורק אם $PTP = TP$.

4. נתבונן במטריצה ממשיות, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. לכל ערך עצמי λשל A מצא את המרחב העצמי המוכלל המתאים V_λ, ואת המטריצה המייצגת של העתקה T_A, ($T_A(v) = Av$) המצומצמת לV_λ . הכלל את הדוגמה ל n כללי.

5. תהי $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית.

(א) מצא ערכים העצמיים והמרחבים העצמיים המוכללים של המטריצה.

(ב) חשב את המטריצה המייצגת של העתקה T_A המצומצמת לכל מרחב עצמי ביחס לבסיס שלו.

(ג) בטא את המטריצה המייצגת של T_A כמטריצת בלוקים אלכסונית ביחס לבסיס מתאים.

הערה: אם אינכם יודעים איך להתמודד עם משוואות ממעלה 4 ־ נא לקרוא ($http://u.cs.biu.ac.il/~tsaban/LinearAlgebra/LAT73/RootSearch.pdf$).