אינפי 2 – תרגיל 9

1. חשב את הגבול הבא $\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x}\frac{\sin^3 3t}{\left(1+t^2\right)^{10}}dt$

פתרון:

זהו אינטגרל על פונקציה אי זוגית בקטע $[-x,x]$ ולכן הוא תמיד שווה אפס לכל x ולכן הגבול הינו אפס.

2. תהי f פונקציה יורדת כך ש $\int_a^\infty f$ מתכנס

a. הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

הוכחה:

דבר ראשון נוכיח שהפונקציה הינה אי שלילית. אחרת קיימת נקודה a כך ש $f(a)=r<0$ אבל משם והילך הפונקציה רק יורדת ולכן $\forall x>a: f(x)<r$ ולכן האינטגרל מתבדר בסתירה.

יהי $\varepsilon>0$. אם $\forall x: f(x)>\varepsilon$ אזי האינגרל בוודאי מתבדר, לכן קיים x_0 כך ש $f(x_0)<\varepsilon$. אבל f מונוטונית יורדת ולכן לכל $x>x_0$ מתקיים $f(x)<\varepsilon$. מ.ש.ל.

b. הוכח כי אפילו $\lim_{x\to\infty} x\cdot f(x)=0$ (רמז: הראה קודם ש $\sum 2^n f(2^n)<\infty$)

הוכחה:

f יורדת ואי שלילת כפי שהוכחנו בסעיף קודם, ולכן מקיימת את תכונות מבחן האינטגרל להתכנסות טורים. לכן $\sum f(k)<\infty$. אבל טור זה מקיים את תנאי משפט העיבוי (אי שלילי ויורד) ולכן גם $\sum 2^k f(2^k)<\infty$ ולכן $\lim_{x\to n} 2^n f(2^n)=0$. כעת, לכל x קיים n כך ש $2^{n-1}<x<2^n$ לכן $xf(x)<2^n f(2^{n-1})$ (כי הפונקציה מונוטונית יורדת) ולכן $\forall x: xf(x)\le 2\cdot 2^{n-1} f(2^{n-1})$ אבל הצד הימני שואף לאפס כאשר $x\to\infty$ ולכן גם $xf(x)\to 0$.

3. **נוסחת בונה** תהי f מונוטונית ב$[a,b]$ ו g אינטגרבילית אי שלילית בקטע זה. הוכח שקיימת נקודה $c\in[a,b]$ עבורה מתקיים

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^c g(x)dx+f(b)\int_c^b g(x)dx$$

(**רמז**: הנח ב.ה.כ. ש f יורדת. הוכח שלפונקציה $H(t):=\left[f(b)-f(a)\right]\int_a^t g(x)dx$ קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש $H(c)=\int_a^b\left[f(b)-f(x)\right]g(x)dx$)

4. **נוסחת בונה** תהי f מונוטונית ב$[a,b]$ כך ש' f' מוגדרת ואינטגרבילית בקטע, ותהי g רציפה בקטע. הוכח שקיימת נקודה $c\in[a,b]$ עבורה מתקיים

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx$ (**רמז**: הגדר $G(x)=\int_a^x g(t)dt$.
הפעל אינטגרציה בחלקים)

5. הוכח ש $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס (**רמז**: נוסחת בונה)

6. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר α האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx$

פתרון:

מתקיים $1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-2}}}$ אבל $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}$ מתכנס אם"ם $\alpha-2<1$ אם"ם $\alpha<3$ ולכן

לפי מבחן השוואה הגבולי $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx$ מתכנס אם"ם $\alpha<3$.

כעת, עבור $\alpha>1$ מתקיים $\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\le\frac{1}{x^\alpha}$ ולכן לפי מבחן ההשוואה האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx$ מתכנס.

נסתכל כעת על $\alpha=1$. הפונקציה $\frac{\sin^2 x}{x}$ רציפה בקטע $[1,\infty)$ ולכן יש לה קדומה שם.

$$F(x)=\int\frac{\sin^2 x}{x}=\ln x\sin^2 x-\int \ln x 2\sin x\cos x=\ln x\sin^2 x-\int \ln x\sin 2x=$$

$$=\ln x\sin^2 x-\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\ln x+\frac{1}{2}\int\frac{\cos 2x}{x}\right]=\ln x\sin^2 x+\ln x\frac{1}{2}\left[\cos^2 x-\sin^2 x\right]-\frac{1}{2}\int\frac{\cos 2x}{x}=$$

$$=\ln x\frac{1}{2}\left[\cos^2 x+\sin^2 x\right]-\frac{1}{2}\int\frac{\cos 2x}{x}=\frac{1}{2}\left[\ln x-\int\frac{\cos 2x}{x}\right]$$

נסמן $G(x)=\int\frac{\cos 2x}{x}$ ונסתכל על $\int_1^\infty\frac{\cos 2x}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{\cos 2x}{x}=\lim_{b\to\infty}G(b)-G(1)$ אבל קל לראות

שלפי דיריכליי האינטגרל הלא אמיתי הזה מתכנס שכן $\frac{1}{x}$ מונוטונית יורדת לאפס עם נגזרת רציפה

והאינטגרל $\int_a^b \cos 2x=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_a^b$ חסום. לכן $\lim_{b\to\infty}G(b)-G(1)=L<\infty$, כלומר G חסומה ב
$[1,\infty)$.

ביחד סה"כ נקבל $\int_1^\infty\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to\infty}F(x)-F(1)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left[\ln x-G(x)\right]=\infty$ ולכן האינטגרל

מתבדר.

עבור $\alpha<1$ מתקיים $\frac{\sin^2 x}{x}\ge\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}$ בקטע $[1,\infty)$ ולכן מתבדר.

תשובה סופית: האינטגרל מתכנס אם"ם $1<\alpha<3$

7. הראה שהאינטגרל הבא מתכנס $\int_0^\infty x^2\sin\left(x^4\right)dx$

פתרון:

נבצע הצבה $t=x^4, dt=4x^3dx$ לקבל $\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt[4]{t}}dt=\int_1^\infty x^2\sin\left(x^4\right)dx$. כעת $\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ מונוטונית יורדת לאפס עם הנגזרת רציפה בקטע. האינטגרל $\int_1^x \sin t dt=\cos 1-\cos x$ חסום.אזי לפי מבחן דיריכליי האינטגרל מתכנס.

עבור $\int_0^1 x^2\sin\left(x^4\right)dx$ זו פונקציה רציפה ולכן מתכנסת.

8. נגדיר את פונקציה גמא. זו פונקציה חשובה, קשורה להשערת רימן (מי שפותר את ההשערה מקבל מיליון דולר, תלמדו את ההשערה בהמשך לימודיכם)

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

a. הוכח שזו פונקציה מוגדרת היטב לכל $x>0$

הוכחה:

יהי $x>0$. ידוע ש $\int_0^1 t^\alpha$ מתכנס עבור $\alpha>-1$ ובמקרה שלנו $x-1>-1$. $\lim_{t\to 0}\frac{e^{-t}t^{x-1}}{t^{x-1}}=1$ ולכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ מתכנס לכל $x>0$.

ידוע ש $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}$ מתכנס. כעת $\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t}t^{x-1}}{\frac{1}{t^2}}=0$ לכל x ולכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי האינטגרל $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ מתכנס. סה"כ מ.ש.ל.

b. תוך שימוש באינטגרציה בחלקים הוכח $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

הוכחה:

$$x\Gamma(x)=x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}=x\frac{1}{x}t^xe^{-t}\Big|_0^\infty-x\int_0^\infty -e^{-t}\frac{1}{x}t^x=\int_0^\infty e^{-t}t^x=\Gamma(x+1)$$

למה מותר לעשות אינטגרציה בחלקים על אינטגרל לא אמיתי?

$\int_a^\infty f'g=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f'g=\lim_{b\to\infty}\left[fg\Big|_a^b-\int_a^b fg'\right]=fg\Big|_a^\infty-\int_a^\infty fg'$ (כמובן שזה בהנחה שכל הגבולות מתכנסים וכל האינטגרלים מוגדרים)

c. הראה כי $\Gamma(1)=1$ והסק כי $\Gamma(n)=(n-1)!$ לכל n טבעי

פתרון:

$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}=-e^{-t}\Big|_0^\infty=1$, זו הנחת האינדוקציה. נניח עבור n ונוכיח עבור $n+1$

$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)!=n!$ (בזכות סעיף ב')

נוסחת בונה (נוסחת הערך הממוצע השנייה לאינטגרל מסויים)

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx \qquad \oplus$$

- ***נכסח שני תנאים לקיום הנוסחא :*** (לא אומר שאין תנאים אחרים ...!)

1. תהי f פונקציה מונוטונית בקטע $[a,b]$, $g(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע זה , ששומרת בו על סימן קבוע (אי שלילית או אי חיובית) . אז קיימת נקודה $c \in [a,b]$ שבה מתקיימת הנוסחא $\oplus$

2. תהי f פונקציה מונוטונית בקטע $[a,b]$ כך ש : $f^{(1)}$ (נגזרת ראשונה) אינטגרבילית בקטע . כמו כן נניח כי $g(x)$ רציפה בקטע . אז קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך שמתקיימת הנוסחא $\oplus$

הוכחות – נוכיח תנאים 1 ו -2 – כל אחד בתנאים שלו :

1. (מייזלר – עמוד 324) : נניח בלי הגבלת הכלליות כי f איננה יורדת בקטע וכי g אי שלילית .

נסתכל בפונקציה : $\mathrm{F}(t) \coloneqq [f(b)-f(a)]\int_a^t g(x)dx$.

אז F פונקציה רציפה (...) . לכל $x \in [a,b]$ מתקיים :

$0 \le f(b)-f(x) \le f(b)-f(a)$ (כי הנחנו שהפונקציה איננה יורדת) ולכן :

$$F(a) = 0 \le \int_a^b [f(b)-f(x)]g(x)dx \le \int_a^b [f(b)-f(a)]g(x)dx =$$

$$[f(b)-f(a)]\int_a^b g(x)dx = F(b)$$

מכיוון ש – $F(x)$ פונקציה רציפה , קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש:

לכן: . $F(c)=\int_a^b[f(b)-f(x)]g(x)dx=f(b)\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx$

ומכאן : $F(c)=[f(b)-f(a)]\int_a^c g(x)dx=f(b)\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^c g(x)dx+f(b)[\int_a^b g(x)dx-\int_a^c g(x)dx]=$$

$$=f(a)\int_a^c g(x)dx+f(b)\int_c^b g(x)dx$$

---

2. נסתכל על הפונקציה הבאה : $G(x)\coloneqq\int_a^x g(t)dt$. פונקציה זו גזירה (!) וקיים לפי המשפט היסודי $G^{(1)}(x)=g(x)$. קיים (נשים לב כי ל- $f^{(1)}$ יש סימן קבוע כי הנחנו f מונוטונית ונתון גם שנגזרת זו אינטגרבילית , ולכן נוכל במהלך ההוכחה להשתמש במשפט הערך הממוצע האינטגרלי) :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)G^{(1)}(x)dx=_{\text{חלקים}}=(f(x)G(x))_a^b-\int_a^b G(x)f^{(1)}(x)dx$$

$$=_{\substack{mean\ value\\ for\ integrals}}=f(b)G(b)-G(c)\int_a^b f^{(1)}(x)dx=f(b)G(b)-G(c)[f(b)-f(a)]=$$

$$f(a)G(c)+f(b)[G(b)-G(c)]=f(a)\int_a^c g(t)dt+f(b)\int_c^b g(x)dx$$

, כשהשתמשנו במשפט ערך הביניים ה"רגיל" עבור אינטגרלים וקיום נקודה c בקטע שנובע מהמשפט הזה .

יישום לנוסחא : נוכיח כי האינטגרל $\int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx$ מתכנס ! (הבעייה היחידה בהתכנסות היא ההתנהגות באינסוף – שהרי בסביבת אפס הפונקציה בתוך האינטגרל , חסומה כי גבולה באפס הוא (זוכרים ?) – 1 , ולכן למרות שלא מוגדרת באפס ניתן להגדירה כ- 1 שם ללא שינוי ערך האינטגרל .

אז - הפונקציה $\frac{1}{x}$ מונוטונית יורדת בכל קטע ונסתכל על הביטוי : $\int_p^{q} \frac{sinx}{x} dx$ עבור p<q .

לפי נוסחת בונה(מדוע ניתן להשתמש בה ?...) קיים :

$$\left|\int_p^{q} \frac{sinx}{x} dx\right| = \left|\frac{1}{p}\int_p^{A} sinx dx + \frac{1}{q}\int_A^{q} \sin x dx\right| \leq 2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \xrightarrow[\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}]{} 0 \quad ,$$

לכן לפי **<u>קריטריון קושי</u>** – האינטגרל שלנו מתכנס .