1108-11

הרצאה 11

תזכורת - $T: V \to W$ פונקציה:

$$T(v_1+v_2) = Tv_1 + Tv_2$$

$$T(\alpha v) = \alpha T v$$

אז:

$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T v_1 + \dots + \alpha_n T v_n$$

משפט המימד - $\dim_F \operatorname{Ker} T + \dim_F \operatorname{Im} T = \dim_F V$

($\dim_F N(A)$ + $\operatorname{rank}(A)$ = m תזכורת - למה $A \in F^{n\times m}$)

מימד "מרחב העמודות"
מימד מרחב השורות

דוגמה/תרגיל: נניח כי שני פולינומים ממעלה $\leq d$ מסכימים ב-$d+1$ נק' שונות. אזי הם שווים.

בשפה מתמטית:

$$f(x), g(x) \in \mathbb{F}_d[x], \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{d+1} \in \mathbb{F}$$

$$f(\alpha_1) = g(\alpha_1), \dots, f(\alpha_{d+1}) = g(\alpha_{d+1})$$

אז: $f = g$.

(קשור ל- secret sharing)

הוכחה: תהיינה $\alpha_1, \dots, \alpha_{d+1} \in \mathbb{F}$ (שונים) נגדיר ה"ל:

$$T: \mathbb{F}_d[x] \longrightarrow \mathbb{F}^{d+1}$$

$$T(f(x)) = [f(\alpha_1) \ \cdots \ f(\alpha_{d+1})]$$

צ"ל:

$$T(f(x)+\lambda g(x)) = [f(\alpha_1)+\lambda g(\alpha_1) \ \cdots \ f(\alpha_{d+1})+\lambda g(\alpha_{d+1})]$$

$$= \underbrace{[f(\alpha_1) \ \cdots \ f(\alpha_{d+1})]}_{T(f(x))} + \lambda \underbrace{[g(\alpha_1) \ \cdots \ g(\alpha_{d+1})]}_{T(g(x))} =$$

$$= T(f(x)) + \lambda \cdot T(g(x))$$

אם נראה ש-T הוא איזומורפיזם (הנ"ל חח"ע ועל) נקבל שאם $T(f(x))=T(g(x))$ אז $f(x)=g(x)$, וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.

מכיוון ש- $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}_d[x] = d+1 = \dim \mathbb{F}^{d+1}$

מספיק להוכיח ש-T על. (לפי משפט המימד):

$$\dim \operatorname{Im} T = d+1$$

$$\dim V = \dim \mathbb{F}_d[x] = d+1$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \operatorname{Ker} T = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\} \Rightarrow T \text{ חח"ע}$$

כדי להוכיח ש-T על, מספיק להוכיח כי:

$\operatorname{Im} T$ מכילה קב' פורשת של $\mathbb{F}^{d+1}$.

נראה כי: $e_1,\dots,e_{d+1}\in \mathrm{Im}\,T$ תנאים מספיקים:

יהי $1\le i\le d+1$, נרצה להראות כי $e_i\in \mathrm{Im}\,T$.
במילים אחרות, יש למצוא $p(x)\in\mathbb{F}_d[x]$ כך ש-

$$T(p(x))=[0\cdots0\ \underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1}\ 0\cdots0]$$

כלומר: $p(\alpha_1)=\dots=p(\alpha_{i-1})=p(\alpha_{i+1})=\dots=p(\alpha_{d+1})=0$

אבל: $p(\alpha_i)=1$

$$(\forall j\neq i,\ p(\alpha_j)=0)$$

נבנה פולינום כזה:

$$p(x)=\frac{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_{d+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_{d+1})}$$

p מכפלה של d פולינומים לינאריים:

$$p(x)\overset{*}{=}\frac{x-\alpha_1}{\alpha_i-\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\frac{x-\alpha_{i-1}}{\alpha_i-\alpha_{i-1}}\cdot\frac{x-\alpha_{i+1}}{\alpha_i-\alpha_{i+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{x-\alpha_{d+1}}{\alpha_i-\alpha_{d+1}}$$

לכן: $\deg p(x)\le d$

לסיום: $p(x)\in\mathbb{F}_d[x]$

נחשב את p בערכים של $\alpha_1,\dots,\alpha_{d+1}$.

$$p(\alpha_i)=\frac{\cancel{\alpha_i-\alpha_1}}{\cancel{\alpha_i-\alpha_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{\alpha_i-\alpha_{i-1}}}{\cancel{\alpha_i-\alpha_{i-1}}}\cdot\frac{\cancel{\alpha_i-\alpha_{i+1}}}{\cancel{\alpha_i-\alpha_{i+1}}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{\alpha_i-\alpha_{d+1}}}{\cancel{\alpha_i-\alpha_{d+1}}}$$

$$=1$$

ואילו עבור $j\neq i$:

$$p(\alpha_j)=0$$

מכיוון שאחד מהגורמים של $p(x)$ הינו:

$$\frac{x-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}$$ ב-(¥).

מסקנה:

$$T(p(x))=e_i$$

ניתן לקבל $p(x)$ כזה לכל $1\le i\le d+1$, כלומר:

$$e_1,\dots,e_{d+1}\in \operatorname{Im} T$$
$$\Downarrow$$
$$T \text{ על}$$
$$\Downarrow$$
T "הפיך".

מ.ש.ל.

מסקנה נוספת -

אם $p(x)\neq 0$ פולינום ממעלה $\le d$ אז יש לו לכל היותר d שורשים.

הוכחה:

אם $\alpha_0, \ldots, \alpha_{d+1}$ שורשים של $p(x)$ אז:

$$T(p(x)) = [p(\alpha_0) \quad \cdots \quad p(\alpha_{d+1})] =$$
$$= [0 \quad \cdots \quad 0]$$

לכן: $p(x) \in \operatorname{Ker} T$

ראינו ש- $T: \mathbb{F}_d[x] \to \mathbb{F}^{d+1}$ חח"ע, לכן $\operatorname{Ker} T = 0$.

לכן $p(x)$ פולינום האפס.

מרחב הה"ל

תכונות - הרכבה של ה"ל.

ה"ל $T: V \to W$

ה"ל $S: W \to U$

$$S \circ T : V \to U$$
$$(S \circ T)(v) = S(Tv)$$

גם כן ה"ל.

<u>דוגמה לשימוש קלאסי</u> - T, S ה"ל.

$$\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} S \iff S \circ T = \underset{\text{העתקת האפס}}{0}$$

<u>הוכחה:</u> $(\Rightarrow)$ נניח $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} S$. יהי $v \in V$.

נחשב:

$$(S\circ T)(v) = S(\underbrace{Tv}_{\in \operatorname{Im} T}) = 0$$

ולכן שייך ל- $\operatorname{Ker} S$

כלומר, הה"ל $S\circ T$ מעבירה כל וקטור ל-0, ולכן היא העתקת האפס.

($\Leftarrow$) נניח $S\circ T=0$.

יהי $w\in \operatorname{Im} T$, אזי יש $v\in V$ כך ש-

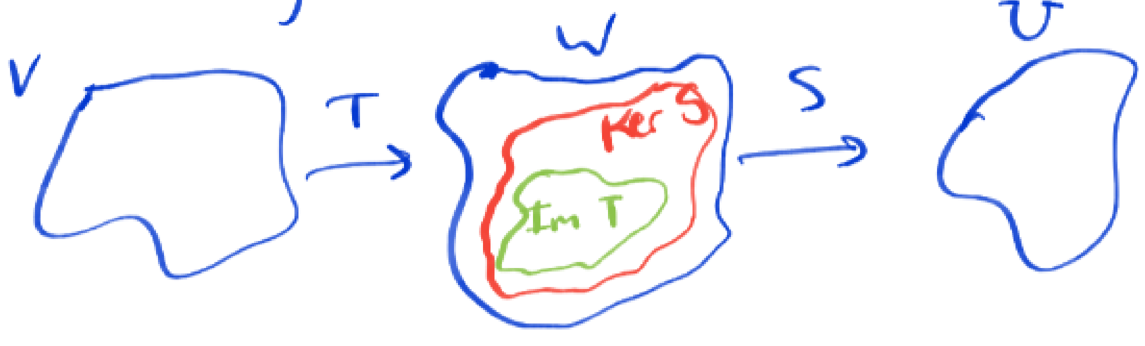
$$w = Tv$$

נקבל:

$$0 = (\underbrace{S\circ T}_{\text{העתקת האפס}})(v) = S(Tv) = Sw$$

קיבלנו שלכל $w\in \operatorname{Im} T$, $Sw=0$ כלומר $w\in \operatorname{Ker} S$.

לכן: $\operatorname{Im} T\subseteq \operatorname{Ker} S$ כנדרש. מ.ש.ל.



<u>חיבור וכפל בסקלר של ה"ל.</u>

תהינה $S,T: V \to W$ ה"ל. נגדיר:

(1) $\boxed{T+S : V \longrightarrow W}$

לכל:

$$(T+S)_v = T_v + S_v$$

וכן נגדיר: $(\alpha \in \mathbb{F})$ (2) $\boxed{\alpha T : V \longrightarrow W}$

$$(\alpha T)_v = \alpha T_v$$

אלו אכן ה"ל:

(1) $(T+S)(v_1+\lambda v_2) = T(v_1+\lambda v_2) + S(v_1+\lambda v_2) =$

$= T_{v_1} + \lambda T_{v_2} + S_{v_1} + \lambda S_{v_2} =$

$= (T_{v_1} + S_{v_1}) + \lambda (T_{v_2} + S_{v_2}) =$

$= (T+S)_{v_1} + \lambda (T+S)_{v_2}$

(2) $(\alpha T)(v_1+\lambda v_2) = \alpha T(v_1+\lambda v_2) =$

$= \alpha (T_{v_1} + \lambda T_{v_2}) = \alpha T_{v_1} + \alpha\lambda T_{v_2} =$

$= \alpha T_{v_1} + \lambda\alpha T_{v_2} = (\alpha T)_{v_1} + \lambda (\alpha T)_{v_2}$

מתקיימות אקסיומות – רמ"ז – + קומוטטיבי, אסוציאטיבי,
כפל בסקלר דיסטריבוטיבי על + ...

ולכן אוסף הה"ל מ- V ל- W הינו מ"ו, שנסמן:

$Lin_{\mathbb{F}}(V,W)$

או: $Hom_{\mathbb{F}}(V,W)$.

הערה - אם: $T\in Hom_{\mathbb{F}}(V,W)$

$S_1,S_2\in Hom_{\mathbb{F}}(W,U)$

$$\left(\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & W \arrow[r, shift left, "S_1"] \arrow[r, shift right, "S_2"'] & U \end{tikzcd}\right)$$

אז: $(S_2+S_1)\circ T = S_2\circ T + S_1\circ T$

(במילים אחרות: $\circ$ דיסטריבוטיבי על $+$.)

הוכחה -

$$((S_2+S_1)\circ T)_v = (S_1+S_2)(T_v) =$$

$$= S_1(T_v)+S_2(T_v) = (S_1\circ T)_v + (S_2\circ T)_v =$$

$$= (S_1\circ T + S_2\circ T)_v$$

(וגם הכיוון השני: $S\circ(T_1+T_2)=S\circ T_1+S\circ T_2$.)

הגדרה: תהי $T:V\to W$ ה"ל, יהי…

$B=\{v_1,\dots,v_m\}$ בסיס ל-V
$C=\{w_1,\dots,w_n\}$ בסיס ל-W

נגדיר את <u>המט' המייצגת</u> את T לפי B ו-C:

$$[T]^B_C=\begin{bmatrix} | & & | \\ [Tv_1]_C & \cdots & [Tv_m]_C \\ | & & | \end{bmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times m}$$

במילים אחרות:

$$\begin{cases} Tv_1=\alpha_{11}w_1+\dots+\alpha_{n1}w_n \\ Tv_2=\alpha_{12}w_1+\dots+\alpha_{n2}w_n \\ \vdots \\ Tv_m=\alpha_{1m}w_1+\dots+\alpha_{nm}w_n \end{cases}$$

אז:

$$[T]^B_C=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

<u>טענה:</u> יהיו V,W מ"ו עם בסיסים B,C בהתאמה.
תהיינה $T,S:V\to W$ ה"ל.

אזי:

$$(1) \qquad [T+S]_C^B = [T]_C^B + [S]_C^B$$

סכום ה"ת

סכום של מט' $\mathbb{F}^{n\times m}$

$$(2) \qquad [\alpha \cdot T]_C^B = \alpha \cdot [T]_C^B$$

כפל סקלר ה"ת

כפל סקלר מט' $\mathbb{F}^{n\times m}$

במילים אחרות, ההעתקה:

$$\mathcal{L} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) \longrightarrow \mathbb{F}^{n\times m}$$

$$\mathcal{L}(T) = [T]_C^B$$

$\mathcal{L}$ היא ה"ל.

<u>הוכחה:</u> נסמן:

$$B = \{v_1, \dots, v_m\}$$
$$C = \{w_1, \dots, w_n\}$$

$$[T+S]_C^B = \begin{bmatrix} | & & | \\ [(T+S)v_1]_C & \cdots & [(T+S)v_m]_C \\ | & & | \end{bmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= \Bigg[\ \ \cdots$$

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ [Tv_1+Sv_1]_C & \cdots & [Tv_m+Sv_m]_C \\ | & & | \end{bmatrix}$$

נשים לב כי אם u,u' וקטורים ב-W, וקטורי הקואו׳ לפי בסיס כלשהו (נאמר D) מקיימים:

$$[u]_D+[u']_D=[u+u']_D$$

$D=\{t_1,\dots,t_k\}$

וגם, כי:

$$u=\beta_1t_1+\dots+\beta_kt_k$$
$$u'=\beta_1't_1+\dots+\beta_k't_k$$

אזי:

$$u+u'=(\beta_1+\beta_1')t_1+\dots+(\beta_k+\beta_k')t_k$$

כלומר:

$$[u+u']_D=\begin{bmatrix}\beta_1+\beta_1'\\ \vdots\\ \beta_k+\beta_k'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1'\\ \vdots\\ \beta_k'\end{bmatrix}=[u]_D+[u']_D$$

$$=\begin{bmatrix} | & & | \\ [Tv_1]_C+[Sv_1]_C & \cdots & [Tv_m]_C+[Sv_m]_C \\ | & & | \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} | & & | \\ [Tv_1]_C & \cdots & [Tv_m]_C \\ | & & | \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} | & & | \\ [Sv_1]_C & \cdots & [Sv_m]_C \\ | & & | \end{bmatrix}=$$

$$= [T]_C^B + [S]_C^B$$

$$[\alpha T]_C^B = \Big[\, [(\alpha T)v_1]_C \;\cdots\; [(\alpha T)v_m]_C \,\Big] = \qquad (2)$$

$$= \Big[\, [\alpha T v_1]_C \;\cdots\; [\alpha T v_m]_C \,\Big] =$$

$D = \{t_1, \dots, t_k\}$
בסיס

כעת לקגם, אם: $u = \beta_1 t_1 + \dots + \beta_k t_k$

אז: $\alpha u = \alpha\beta_1 t_1 + \dots + \alpha\beta_k t_k$

ולכן:

$$[\alpha u]_D = \begin{bmatrix} \alpha\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha\beta_k \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} = \alpha [u]_D$$

$$= \Big[\, \alpha[Tv_1]_C \;\cdots\; \alpha[Tv_m]_C \,\Big] = \alpha \Big[\, [Tv_1]_C \;\cdots\; [Tv_m]_C \,\Big] =$$

$$= \alpha \cdot [T]_C^B .$$

מ.ש.ל.

לפצן: $\mathcal{L} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \to \mathbb{F}^{n \times m}$

$$\mathcal{L}(T) = [T]_C^B$$

נקרא ה"ל של מ"ו.

כעת נטען כי $\mathcal{L}$ איזומורפיזם:

<u>טענה</u>: $\mathcal{L}$ ה"ל הוא חח"ע ועל.

<u>הוכחה</u>:

<u>חח"ע</u> - נחשב את $\ker\mathcal{L}$.
תהא $T\in Hom_{\mathbb{F}}(V,W)$ ה"ל בגרעין.

כלומר: $[T]_C^B = \mathcal{L}(T) = 0$.

בפרט, ש- $[Tv_1]_C = \dots = [Tv_m]_C = 0$

כלומר: $Tv_1 = 0\cdot w_1 + \dots + 0\cdot w_n = 0$

$\vdots$

$Tv_m = 0\cdot w_1 + \dots + 0\cdot w_n = 0$

קיבלנו שלכל $v_1,\dots,v_m$, $Tv_i = 0$

אבל זה אומר ש- $T=0$ (כי היא העתקה המאפסת על בסיס).

<u>על</u> - תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$.
נראה שקיימת ה"ל $T:V\to W$ כך ש-

$$.\mathcal{L}(T) = [T]_C = A$$

נראה:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

ונגדיר את $T: V \longrightarrow W$ לפי:

$$\begin{cases} Tv_1 = \alpha_{11}w_1 + \cdots + \alpha_{n1}w_n \\ Tv_2 = \alpha_{12}w_1 + \cdots + \alpha_{n2}w_n \\ \vdots \\ Tv_m = \alpha_{1m}w_1 + \cdots + \alpha_{nm}w_n \end{cases}$$

זה אפשרי, לפי משפט ההגדרה, וברור מהבנייה כי:

$$[T]^B_C = \left[[Tv_1]_C \cdots [Tv_m]_C \right] = A$$

מ.ש.ל.

מסקנה:

$$\mathcal{L}: \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\overset{m}{V}, \overset{n}{W}) \longrightarrow \mathbb{F}^{n\times m}$$

היא איזומורפיזם של מ"ו.

$$\mathcal{L}: \mathrm{Hom}(V,W) \to$$

מסקנה:

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) =$$

$$= \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^{n\times m} = nm$$

דוגמאות:

1 תהא $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ הנ"ל:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ x+y \\ 5y \end{bmatrix}$$

נמצא $[T]^{E_2}_{E_3}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2 נגדיר: הנ"ל: $T:\mathbb{F}^{2\times 2} \to \mathbb{F}^{2\times 2}$ כך:

$$T(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot B$$

נמצא $[T]^{E}_{E}$ כאשר E הבסיס הסטנדרטי של מרחב המטריצות.

$$E = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

נחשב:

$$Te_{11} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix} = e_{11}-e_{21}$$

$$Te_{12} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix} = e_{12}-e_{22}$$

$$Te_{21} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} = e_{11}+e_{21}$$

$$Te_{22} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} = e_{12}+e_{22}$$

ולסיכום:

$$[T]_E^E = \begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

③ נתבונן בה"ל:

$$T: \mathbb{F}_d[x] \longrightarrow \mathbb{F}_d[x]$$

הנתונה לפי:

$$T(p(x)) = p'(x+1) \qquad \text{(אופ' גז'...)}$$

חשבו $[T]_E^E$ $E=\{1,x,\dots,x^d\}$.

נחשב את וקטורי הקוא':

$$1 \cdot 1 = 0$$

$$T \cdot x = 1$$

$$T \cdot x^2 = 2(x+1) = 2x+2$$

$$\vdots$$

$$T \cdot x^k = k(x+1)^{k-1}$$

$$\vdots$$

$$T \cdot x^d = d(x+1)^{d-1}$$

$$(x+1)^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} x^i \cdot \underbrace{1^{k-i-1}}_{1}$$

$$\frac{k!}{i!(k-i)!}$$

לכן המט׳ המייצגת לפי הבסיס הטבעי הינה:

$$[T]_E^E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3\cdot\binom{2}{0} & & k\cdot\binom{k-1}{0} & & d\cdot\binom{d-1}{0} \\ 0 & 0 & 2 & 3\cdot\binom{2}{1} & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 3\cdot\binom{2}{2} & & & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & k\cdot\binom{k-1}{k-1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & & d\cdot\binom{d-1}{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \vdots & & \\ & & & & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

11^{20}

טענה: תהא $T:V\to W$ ה"ל

$B=\{v_1,\dots,v_m\}$ בסיס ל-V, $C=\{w_1,\dots,w_n\}$ בסיס ל-W:

לכל $v\in V$:

$$[T]_C^B\cdot[v]_B=[Tv]_C$$

הוכחה: רעיון:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\text{וקטור קואורד' } B"'] & W \arrow[d, "\text{וקטור קואורד' } C"] \\
\mathbb{F}^m \arrow[r, "{[T]_C^B\cdot}"] & \mathbb{F}^n
\end{tikzcd}$$

לכל $1\le i\le m$ נרשום:

$$(*)\quad Tv_i=\alpha_{1i}w_1+\dots+\alpha_{ni}w_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}w_k$$

בהגדרה, המט' המייצגת:

$$[T]_c^B=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm}\end{bmatrix}$$

יהי $v\in V$. נניח: $v=\beta_1v_1+\dots+\beta_mv_m$.

$$[T]_C^B \cdot [v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ & \vdots & \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{km} \\ & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \vdots \\ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{k\ell}\beta_\ell \\ \vdots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \leftarrow k \\ \vdots \\ n \end{array}$$

$$= [Tv]_C$$ [illegible]

$$Tv = T(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m) =$$

$$= \beta_1 Tv_1 + \cdots + \beta_m Tv_m = \sum_{\ell=1}^{m} \beta_\ell Tv_\ell =$$

$(*)$ [illegible]

$$= \sum_{\ell=1}^{m} \beta_\ell \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k\ell} w_k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{k\ell} \beta_\ell \right) w_k$$

$$= \sum_{k=1} \Big(\sum_{l=1} \alpha_{kl} \ldots \Big) \ldots$$

נקבל שקול הקודם:

$$[Tv]_C = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \sum_{l=1}^{m} \alpha_{kl}\beta_l \\ \\ \\ \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n \end{array}$$

מסקנה -

$$[T]_C^B \cdot [v]_B = [Tv]_C$$

מ.ש.ל.

כנדרש.

<u>מסקנות:</u>

$$\underline{C\left([T]_C^B\right) = \left\{ [w]_C \,\middle|\, w \in \operatorname{Im} T \right\}} \quad (1)$$

<u>הוכחה:</u>

$(\supseteq)$:

$$C\left([T]_C^B\right) \ni \underbrace{[T]_C^B \cdot [v]_B}_{} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{המשפט הקודם}}}{=} [Tv]_C \underset{\substack{\uparrow \\ w \in \operatorname{Im} T \\ \exists v :\ w = Tv}}{=} [w]_C$$

$(\subseteq)$: יהי $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in C\left([T]_C^B\right)$, אז קיים $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = [T]^B \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_n\end{bmatrix} \quad C \quad \underbrace{\begin{bmatrix}\beta_m\end{bmatrix}}$$

אם, נגדיר $v=\beta_1v_1+\dots+\beta_mv_m$ ונקבל:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} = [T]^B_C\cdot[v]_B \underset{\text{משפט מהשיעור}}{=} [T_v]_C \in$$

$$\in\left\{[w]_C \,\middle|\, w\in \operatorname{Im}T\right\}$$

מ.ש.ל.

$$N\left([T]^B_C\right)=\left\{[v]_B \,\middle|\, v\in \operatorname{Ker}T\right\} \quad (2)$$

$(\subseteq)$: יהי $v\in \operatorname{Ker}T$, נראה כי $[v]_B\in N\left([T]^B_C\right)$.

אכן:

$$\underbrace{[T]^B_C}\cdot\underbrace{[v]_B} = [T_v]_C \overset{\downarrow}{=} [0]_C \underset{\uparrow}{=} 0$$

$$0=0\cdot w_1+\dots+0\cdot w_n$$

לכן $[v]_B\in N\left([T]^B_C\right)$.

$(\supseteq)$: יהי $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}\in N$, אזי:

$$[T]^B_C\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}}_{=[v]_B}=0$$

אם נגדיר $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_mv_m$, נקבל:

$$[T_v] \quad = [T]^B \cdot [v] \quad = 0$$

כלומר: $Tv = 0\cdot w_1 + \dots + 0\cdot w_n = 0$

ולכן $v \in \operatorname{Ker} T$. מ.ש.ל.

(3) $\operatorname{rank}[T]_C^B = \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T$. (נובע מ-1)

$\dim_{\mathbb{F}} N([T]_C^B) = \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Ker} T$. (נובע מ-2)

<u>אלגוריתם לחישוב $\operatorname{Im} T$, $\operatorname{Ker} T$, ...;</u>

מוצאים בסיסים ל-V,W, עוברים למט' המייצגת, משתמשים ב-C, N, rank...

(לפי האלג' שלמדנו עבור מטריצות) ועוברים בחזרה ל-

V,W.

<u>דוגמה:</u> חשבו גרעין ותמונה של הה"ל:

$$T: \mathbb{F}^{2\times 2} \to \mathbb{F}^{2\times 2}$$

$$T(B) = A\cdot B - B\cdot A$$

כאשר:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון: נעבור למרחב הקואורדינטות.

$$E=\{e_{11},e_{12},e_{21},e_{22}\}$$

מהי המט' המייצגת של T ?

$$Te_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}=-e_{12}$$

$$Te_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=0$$

$$Te_{21}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=e_{11}-e_{22}$$

$$Te_{22}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=e_{12}$$

$$[T]_E^E=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{lcl} C([T]_E^E) & \longleftrightarrow & \operatorname{Im} T \\ N([T]_E^E) & \longleftrightarrow & \operatorname{Ker} T \end{array}\right]$$

נדרג את המט' המייצגת:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C([T]_E^E) = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

מסקנה: בסיס ל- $\operatorname{Im} T$:

$$\underline{\operatorname{Im} T} = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{-e_{12}, e_{11} - e_{22}\} =$$

$$= \underline{\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}}$$

נעבור לחישוב $\operatorname{Ker} T$. נמצא בסיס ל- N:

$$x_2 = s,\ x_4 = t \Rightarrow x_3 = 0,\ x_1 = t$$

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\t\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}\vdots\\0\end{bmatrix}$$

ולכן:

$$\underline{\operatorname{Ker} T} = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{e_{11}+e_{22},\ e_{12}\} =$$

$$= \underline{\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}}$$

קבלנו, $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T = 2$.

<u>הערה</u> - ל- $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T$ קוראים גם <u>דרגה</u> של T:

$\operatorname{rank} T \; (= \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T)$.

<u>הערה</u> - כדי לעבור ממרחב הקואו' למרחב המקורי, אנו הופכים כל וקטור קואורדינטות לוקטור במרחב המתאים:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} \in C([T]_C^B)$$

$$C = \{w_1, \dots, w_n\}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_m\end{bmatrix} \in N([T]_C^B)$$

$B=\{v_1,\dots,v_m\}$

$$\beta_1 v_1+\dots+\beta_m v_m$$

<u>מעבר ממרחב וקטורי למרחב הקואורדינטות ובחזרה:</u>

$E=\{e_{11},e_{12},e_{21},e_{22}\}$, $V=\mathbb{F}^{2\times 2}$

$$\mathbb{F}^4 \longleftrightarrow V$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{12}\\ \alpha_{21}\\ \alpha_{22}\end{bmatrix} \longmapsfrom \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\alpha_{11}}e_{11}+\underline{\alpha_{12}}e_{12}+\underline{\alpha_{21}}e_{21}+\underline{\alpha_{22}}e_{22}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix} \longmapsto v=\alpha_1e_{11}+\alpha_2e_{12}+\alpha_3e_{21}+\alpha_4e_{22}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$$

<u>טענה:</u> אם $T:V\to W$ ה"ל

$S:W\to U$ ה"ל

B בסיס מ"ו - V

C בסיס מ"ו - W

D בסיס מ"ו - U

אז:

$$[S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B$$

הרכבת ה"ל   מכפלת מט'

הוכחה: לכל $v \in V$ מתקיים:

$$[S \circ T]_D^B \cdot [v]_B = [(S \circ T)v]_D =$$

מהלמה עבור B

$$= [S(Tv)]_D = [S]_D^C \cdot [Tv]_C =$$

$$= [S]_D^C \cdot [T]_C^B \cdot [v]_B$$

בפרט, כי נתון לכל אחד מווקטורי הבסיס B

$$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

$$[v_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, [v_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

לכן:

$$[S \circ T]_D^B \cdot e_1 = ([S]_D^C [T]_C^B) \cdot e_1$$

[illegible]

$$C_k\left([S\circ T]_D^B\right) \qquad C_k\left([S]_D^C[T]_C^B\right)$$

עמודה ה-K

עמודה ה-K

ויוצא שכל עמודותיהן שוות זו לזו בהתאמה, ולכן:

$$[S\circ T]_D^B = [S]_D^C[T]_C^B.$$

מ.ש.ל.

<u>מסקנה:</u> $T: V \to W$ הה"ל הפיכה

בסיס B ‏ בסיס C

ונתון ו- $T^{-1}: W \to V$ הה"ל ההפכית.

אז:

$$\boxed{[T^{-1}]_B^C = \left([T]_C^B\right)^{-1}}$$

ההפכי של הה"ל

ההפכי של מט' מייצג

<u>הוכחה:</u> מתקיים:

$$[T^{-1}]_B^C\cdot[T]_C^B \underset{\text{לפי המשפט הקודם}}{=} [T^{-1}\circ T]_B^B =$$

$$= [I]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$B = \{v_1, \dots, v_m\}$

$\forall k: \quad v_k = 0\cdot v_1 + \dots + 1\cdot v_k + \dots + 0\cdot v_m$

ובאופן דומה בסדר ההפוך, לכן:

$$[T^{-1}]_B^C = \left([T]_C^B\right)^{-1}.$$

מ.ש.ל.

<u>מסקנה:</u> T ה"ל הפיכה $\Longleftrightarrow$ $[T]_C^B$ מט' הפיכה.

<u>הערה:</u> נדבר על מט' מעבר בין בסיסים.

$$B = \{v_1, \dots, v_m\}$$
$$B' = \{v_1', \dots, v_m'\}$$

$$[I]_{B'}^B = \begin{bmatrix} | & & | \\ [v_1]_{B'} & \cdots & [v_m]_{B'} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

למעשה, זהו בדיוק המט' המייצגת של ה"ל <u>הזהות</u>:

$$I_V: V \longrightarrow V$$

כאשר במקום אנו חושבים על הבסיס B.

וקטורים אנו חושבים על מבסיס B'.

מסקנה: תהא $T:V\to W$ ה"ל,

B, B' בבסיסים ל-V , C, C' בבסיסים ל-W

$$[T]^{B}_{C} = [I_W]^{C'}_{C}\cdot[T]^{B'}_{C'}\cdot[I_V]^{B}_{B'}$$

כי הרי:

$$T = I_W \circ T \circ I_V$$

מסקנה: אם $T:V\to V$ ה"ל

B_2 , B_1 בסיסים ל-V, אזי:

$$[T]^{B_1}_{B_1} = [I_V]^{B_2}_{B_1}[T]^{B_2}_{B_2}[I_V]^{B_1}_{B_2}$$

נשים לב כי:

$$[I_V]^{B_1}_{B_2} = \left([I_V]^{B_2}_{B_1}\right)^{-1}$$

ניסוח: אם $[T]^{B_2}_{B_2}, [T]^{B_1}_{B_1}$ מט' מייצגות של אותה ה"ל $T:V\to V$ (בהתאם לבסיסים B_1, B_2), אז:

$$\boxed{[T]_{B_1}^{B_1} = P \cdot [T]_{B_2}^{B_2} \cdot P^{-1}}$$

(כאשר P מט׳ המעבר בין הבסיסים).

יחס זה בין המטריצות נקרא <u>צמידות</u> (conjugacy).

נראה כי כל שתי מט׳ צמודות מייצגות את אותה הה״ל.

במובן זה,

מטריצות עד כדי צמידות $\xleftrightarrow{1:1}$ העתקות לינאריות

ה״ל $\Longleftrightarrow$ מחלקת צמידות של מט׳

(= מח״ש של מט׳ בהתאם ליחס הצמידות).
