בדידה להנדסה־ תרגיל 7

13 במאי 2019

1. יהיו $R_0 \subseteq R_1$ יחסים על קבוצה A, הוכח/הפרך:
א. R_0 רפלקסיבי $\Leftarrow$ R_1 רפלקסיבי.
ב. R_0 סימטרי $\Leftarrow$ R_1 סימטרי.
פתרון:
א. נכון. R_0 רפלקסיבי $\Leftarrow I_A \subseteq R_0 \Leftarrow I_A \subseteq R_1 \Leftarrow R_1$ רפלקסיבי.
ב. לא נכון. $A = \{1,2\}$, $R_0 = \phi$, $R_1 = \{(1,2)\}$.

2. תהי A קבוצה לא ריקה ותהי $\{R_i\}_{i\in I}$ משפחה של יחסים רפלקסיביים וסימטריים עליה.
א. הוכח: $R = \bigcap\limits_{i\in I} R_i$ רפלקסיבי וסימטרי. האם זה נכון עבור $R = \bigcup\limits_{i\in I} R_i$?
הערה: הטענה נכונה גם עבור התכונה "טרנזיטיביות" שנלמד בהמשך.
ב. נסמן $R_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : n|(x-y)\}$, מצא מהם:
1. R_1 2. R_2 3. $R = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} R_n$
פתרון:
א. רפלקסיביות: $\forall i \in I : I_A \subseteq R_i$ (כי R_i רפלקסיבי, מהנתון) $\Leftarrow I_A \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} R_i = R \Leftarrow R$ רפלקסיבי.
סימטריות: יהי $(a,b) \in R$.
$(a,b) \in \bigcap\limits_{i\in I} R_i \Leftarrow \forall i \in I : (a,b) \in R_i \Leftarrow \forall i \in I : (b,a) \in R_i$ (כי R_i סימטרי, מהנתון) $\Leftarrow$
$(b,a) \in \bigcap\limits_{i\in I} R_i = R \Leftarrow R$ סימטרי.
ב. 1. $R_1 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 2. $R_2 = \{(x,y) : a\, and\, b\, have\, the\, same\, parity\}$ 3. $R = I_A$

3. תהי A קבוצה ונגדיר יחס R על $P(A)$ כך: $R = \{(X,Y) : X \triangle Y = \phi\}$.
האם R רפלקסיבי/סימטרי? מהו היחס R?
פתרון:
$$X \triangle Y = (X\cup Y)\setminus(X\cap Y) = \phi \Leftrightarrow (X\cup Y) \subseteq (X\cap Y) \Leftrightarrow X,Y \subseteq X\cap Y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Leftrightarrow X = Y$$
לכן: $R = \{(X,Y) : X = Y\} = I_A$, כלומר R הוא יחס היחידה(ובפרט רפלקסיבי וסימטרי).

4. נגדיר יחס R על $\mathbb{Z}$ כך: $R = \{(a,b) : 5|(2a+3b)\}$.
האם R רפלקסיבי/סימטרי?
פתרון:

רפלקסיביות: $\forall a \in \mathbb{Z} : 2a+3a=5a \Rightarrow 5|(2a+3a) \Rightarrow (a,a) \in R$.
סימטריות: נניח $(a,b) \in R$, אזי $5|(2a+3b)$.
כעת, $2b+3a=5b-3b+5a-2a=5(a+b)-(2a+3b)$
$5|5(a+b)$ וכן $5|(2a+3b)$ ולכן $5|(2b+3a)$ (אם מספר מחלק שני מספרים אז הוא מחלק גם את ההפרש)
אזי $(b,a) \in R \Leftarrow R$ סימטרי.

5. תהי A קבוצה ו־R יחס רפלקסיבי עליה.
הוכח: $\forall n \in \mathbb{N} : R^n \subseteq R^{n+1}$, כלומר $R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \ldots$.
מצא תנאי מספיק לכך ש: $\forall n \in \mathbb{N} : R^n = R^{n+1}$.
פתרון:
נשים לב כי $R^{n+1} = R^n R$. יהי $(a,b) \in R^n$, צריך להוכיח כי $(a,b) \in R^{n+1}$.
נשים לש שכיוון ש־ R רפלקסיבימתקיים $(b,b) \in R$, ולכן מהגדרת הרכבת יחסים נקבל שאם $(a,b) \in R^n \wedge (b,b) \in R$ אז $(a,b) \in R^{n+1}$, כדרוש.

6. כמה יחסים יש על קבוצה בגודל n? כמה מהם רפלקסיביים?
פתרון:
נסמן $|A|=n$, כל יחס הוא תת־קבוצה של $A \times A$.
$|A \times A| = n^2$, ולכן מספר היחסים הוא 2^{n^2}.
כל יחס רפלקסיבי מכיל את יחס היחידה, כלומר $R = I_A \cup B$,
כאשר $B \subseteq (A \times A) \setminus I_A$ תת קבוצה כלשהי, לכן מספר האפשרויות "להשלים" את היחס R הוא מספר תתי הקבוצות של $(A \times A) \setminus I_A$.
$|(A \times A) \setminus I_A| = n^2 - n$ ולכן מספר היחסים הוא 2^{n^2-n}.