

תרגול 13-אפשרית

תרגול חזרה

3. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו/הפריכו:

$$|A| < |B| \Leftrightarrow A \subsetneq B \text{ אם } (N)$$

3. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו/הפריכו:

$$(א) \quad |A| < |B| \text{ אז } A \subsetneq B$$

פתרון: לא נכון. למשל $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$ מתקיים כי A תת קבוצה של B ולא שווה לה אבל העוצמות שוות.

$$(ב) \quad |A \setminus B| = |B \setminus A| \text{ אז } |A| = |B|$$

3. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו/הפריכו:

$$(א) \text{ אם } A \subsetneq B \text{ אז } |A| < |B|$$

פתרון: לא נכון. למשל $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$ מתקיים כי A תת קבוצה של B ולא שווה לה אבל העוצמות שוות.

$$(ב) \text{ אם } |A| = |B| \text{ אז } |A \setminus B| = |B \setminus A|$$

פתרון: לא נכון. למשל $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$ מתקיים כי A ו B שוות עוצמה אבל $|A \setminus B| = 0$ ו $|B \setminus A| = \aleph_0$.

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C . הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

$$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B) \quad (\aleph)$$

הגדרת קבוצת
החזקה

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C . הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

$$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B) \quad (\text{א})$$

פתרון: הוכחה: יהא $X \in P(A) \cup P(B)$ אזי $X \in P(A) \vee X \in P(B)$ שגורר כי $X \subseteq A \vee X \subseteq B$. כיוון ש $A, B \subseteq A \cup B$ נקבל לפי טר' שבכל מקרה $X \subseteq A \cup B$ ולכן $X \in P(A \cup B)$.

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C \quad (\text{ב})$$

הגדרת קבוצת
החזקה

תהיינה קבוצות A, B, C . הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

$$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B) \quad (\text{א})$$

פתרון: הוכחה: יהא $X \in P(A) \cup P(B)$ אזי $X \in P(A) \vee X \in P(B)$ שגורר כי $X \subseteq A \vee X \subseteq B$. כיוון ש $A, B \subseteq A \cup B$ נקבל לפי טר' שבכל מקרה $X \subseteq A \cup B$ ולכן $X \in P(A \cup B)$.

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C \quad (\text{ב})$$

פתרון: הוכחה: נגדיר קבוצה אוניברסלית $U = A \cup B \cup C$ ואז

$$A \cap (B \setminus C) = A \cap (B \cap C^c) = (A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) \setminus C$$

לפי הגדרת הפרש

אסוציאטיביות
החיתוך

הגדרת הפרש

כנדרש.

$$B \subseteq A \text{ אם } P(A) \cap P(B) = P(B) \quad (\text{ג})$$

הגדרת קבוצת
החזקה

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C . הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

$$(א) P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

פתרון: הוכחה: יהא $X \in P(A) \cup P(B)$ אזי $X \in P(A) \vee X \in P(B)$ שגורר כי $X \subseteq A \vee X \subseteq B$. כיוון ש $A, B \subseteq A \cup B$ נקבל לפי טר' שבכל מקרה $X \subseteq A \cup B$ ולכן $X \in P(A \cup B)$.

$$(ב) A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$$

פתרון: הוכחה: נגדיר קבוצה אוניברסלית $U = A \cup B \cup C$ ואז

$$A \cap (B \setminus C) = A \cap (B \cap C^c) = (A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) \setminus C$$

כנדרש.

$$(ג) אם $B \subseteq A$ אז $P(A) \cap P(B) = P(B)$$$

פתרון: הפרכה: נגדיר $A = \{0\}, B = \{1\}$ אזי $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\} \neq P(B) = \{\emptyset, \{1\}\}$. אבל $B \subseteq A$ לא מוכל ב A .

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C . הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B) \quad (\aleph)$$

נשים לב כי $A \times B = \emptyset$

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C . הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B) \quad (\aleph)$$

i. **פתרון:** הפרכה: עבור $A = B = \emptyset$ נקבל כי $P(A \times B) = \{\emptyset\} \neq \{(\emptyset, \emptyset)\} = P(A) \times P(B)$.

$$(A \times B) \setminus (A \times C) = A \times (B \setminus C) \quad (\aleph)$$

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C . הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B) \quad (\aleph)$$

i. **פתרון:** הפרכה: עבור $A = B = \emptyset$ נקבל כי $P(A \times B) = \{\emptyset\} \neq \{(\emptyset, \emptyset)\} = P(A) \times P(B)$.

$$(ב) \quad (A \times B) \setminus (A \times C) = A \times (B \setminus C) \quad \text{הכלה דו כיוונית}$$

פתרון: הוכחה: (\subseteq) יהא $y \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ אזי $y \in A \times B$

ולכן קיימים $a \in A, b \in B$ כך ש $y = (a, b)$. כיוון ש $y \notin A \times C$ נקבל כי $b \notin C$ ולכן $b \in B \setminus C$ ומכאן ש $y = (a, b) \in A \times (B \setminus C)$.

(\supseteq) יהא $y \in A \times (B \setminus C)$ אזי קיימים $a \in A, b \in B \setminus C$ כך ש $y = (a, b)$. מהגדרה $b \in B, b \notin C$ ולכן $(a, b) \in A \times B, (a, b) \notin A \times C$ ולכן $y = (a, b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$.

(ג) אם $A \in C$ או $B \in C$

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C . הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B) \quad (\aleph)$$

i. **פתרון:** הפרכה: עבור $A = B = \emptyset$ נקבל כי $P(A \times B) = \{\emptyset\} \neq \{(\emptyset, \emptyset)\} = P(A) \times P(B)$.

$$(A \times B) \setminus (A \times C) = A \times (B \setminus C) \quad (\text{ב})$$

פתרון: הוכחה: (\subseteq) יהא $y \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ אזי $y \in A \times B$

ולכן קיימים $a \in A, b \in B$ כך ש $y = (a, b)$. כיוון ש $y \notin A \times C$ נקבל כי $b \notin C$ ולכן $b \in B \setminus C$ ומכאן ש $y = (a, b) \in A \times (B \setminus C)$.

(\supseteq) יהא $y \in A \times (B \setminus C)$ אזי קיימים $a \in A, b \in B \setminus C$ כך ש $y = (a, b)$. מהגדרה $b \in B, b \notin C$ ולכן $(a, b) \in A \times B, (a, b) \notin A \times C$ ולכן $y = (a, b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$.

(ג) אם $A \in C$ או $B \in C$

פתרון: הפרכה: $A = \emptyset, B = \{A\}, C = \{B\}$ מקיימות את ה"אם" אבל $A \notin C$.

(ד) אם $C \setminus A = C \setminus B$ או $C \cap A = C \cap B$

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C . הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B) \quad (\text{א})$$

i. **פתרון:** הפרכה: עבור $A = B = \emptyset$ נקבל כי $P(A \times B) = \{\emptyset\} \neq \{(\emptyset, \emptyset)\} = P(A) \times P(B)$.

$$(A \times B) \setminus (A \times C) = A \times (B \setminus C) \quad (\text{ב})$$

פתרון: הוכחה: (\subseteq) יהא $y \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ אזי $y \in A \times B$

ולכן קיימים $a \in A, b \in B$ כך ש $y = (a, b)$. כיוון ש $y \notin A \times C$ נקבל כי $b \notin C$ ולכן $b \in B \setminus C$ ומכאן ש $y = (a, b) \in A \times (B \setminus C)$.

(\supseteq) יהא $y \in A \times (B \setminus C)$ אזי קיימים $a \in A, b \in B \setminus C$ כך ש $y = (a, b)$. מהגדרה $b \in B, b \notin C$ ולכן $(a, b) \in A \times B$, $(a, b) \notin A \times C$ ולכן $y = (a, b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$.

(ג) אם $A \in B$ ו $B \in C$ אז $A \in C$

פתרון: הפרכה: $A = \emptyset, B = \{A\}, C = \{B\}$ מקיימות את ה"אם" אבל $A \notin C$.

(ד) אם $C \setminus A = C \setminus B$ אז $C \cap A = C \cap B$

פתרון: הוכחה: כיוון ש $C = (C \cap A) \cup (C \setminus A), C = (C \cap B) \cup (C \setminus B)$, ושני האיחודים זרים נוכל לחשוב על C כקבוצה אוניברסלית ו $C \setminus A, C \setminus B$ כתתי קבוצות שלה. כעת נניח כי $C \setminus A = C \setminus B$ ולכן $C \cap A = (C \setminus A)^c = (C \setminus B)^c = C \cap B$ כנדרש.

מבחן 2019 מועד ב:

2. (20 נק') נגדיר יחס S על \mathbb{R} ע"י הכלל: aSb אם $a - b \in \mathbb{Z}$

(א) הוכיחו כי S יחס שקילות.

2. (20 נק') נגדיר יחס S על \mathbb{R} ע"י הכלל: aSb אם $a - b \in \mathbb{Z}$.

(א) הוכיחו כי S יחס שקילות.

פתרון: רפלקסיביות: לכל a ממשי מתקיים כי $a - a = 0 \in \mathbb{Z}$ ולכן aSa .

סימטריות: נניח a, b ממשיים כך ש aSb אזי $a - b \in \mathbb{Z}$ ולכן גם $b - a = -(a - b) \in \mathbb{Z}$ מה שגורר כי bSa .

טרנזיטיביות: נניח a, b, c ממשיים כך ש $aSb \wedge bSc$ אזי $[a - b \in \mathbb{Z}] \wedge [b - c \in \mathbb{Z}]$ כיוון שחיבור של מספרים שלמים הוא שלם נקבל כי $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbb{Z}$ מה שגורר ש aSc .

(ב) מצאו את מחלקות השקילות $[0]_S, [0.5]_S$.

2. (20 נק') נגדיר יחס S על \mathbb{R} ע"י הכלל: aSb אם $a - b \in \mathbb{Z}$.

(א) הוכיחו כי S יחס שקילות.

פתרון: רפלקסיביות: לכל a ממשי מתקיים כי $a - a = 0 \in \mathbb{Z}$ ולכן aSa .

סימטריות: נניח a, b ממשיים כך ש aSb אזי $a - b \in \mathbb{Z}$ ולכן גם $b - a = -(a - b) \in \mathbb{Z}$ מה שגורר כי bSa .

טרנזיטיביות: נניח a, b, c ממשיים כך ש $aSb \wedge bSc$ אזי $[a - b \in \mathbb{Z}] \wedge [b - c \in \mathbb{Z}]$ כיוון שחיבור של מספרים שלמים הוא שלם נקבל כי $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbb{Z}$ מה שגורר ש aSc .

(ב) מצאו את מחלקות השקילות $[0]_S, [0.5]_S$.

פתרון: לפי הגדרה

$$[0]_S = \{x \in \mathbb{R} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 0 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

באופן דומה

$$\begin{aligned} [0.5]_S &= \{x \in \mathbb{R} \mid xS0.5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 0.5 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : x - 0.5 = z\} = \{z + 0.5 \mid z \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

(ג) הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $[x]_S = [-x]_S$.

(ג) הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $[x]_S = [-x]_S$.

פתרון: הפרכה: למשל, נראה כי $[\frac{1}{4}]_S \neq [-\frac{1}{4}]_S$. זה שקול להראות כי $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) \notin S$ וזה אכן מתקיים כי $\frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

(ד) קבעו האם עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{R}/S|$ היא \aleph_0 , סופית או אחרת. הוכיחו קביעתכם.

(ג) הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $[x]_S = [-x]_S$.

פתרון: הפרכה: למשל, נראה כי $[\frac{1}{4}]_S \neq [-\frac{1}{4}]_S$. זה שקול להראות כי $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) \notin S$ וזה אכן מתקיים כי $\frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

(ד) קבעו האם עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{R}/S|$ היא \aleph_0 , \aleph , סופית או אחרת. הוכיחו קביעתכם.

פתרון: נוכיח כי $|\mathbb{R}/S| = \aleph$. מצד אחד: הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/S$ המוגדרת $f(x) = [x]_S$ היא על (לפי הגדרה) ולכן $|\mathbb{R}/S| \leq |\mathbb{R}| = \aleph$.

מצד שני נוכיח כי הפונקציה $g: (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}/S$ המוגדרת $g(x) = [x]_S$ היא חח"ע ואז $\aleph = |(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})| \leq |\mathbb{R}/S|$ ואז לפי ק.ש.ב יש שיוויון. הוכחה: יהיו $x_1 \neq x_2$ ב $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ אזי $|x_1 - x_2| \in (0, \frac{1}{4})$ ובפרט $x_1 - x_2$ אינו שלם. לכן $(x_1, x_2) \notin S$ מה ששקול לכך ש $g(x_1) = [x_1]_S \neq [x_2]_S = g(x_2)$ כנדרש.

(א) (10 נק') תהי פונקציה $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ונגדיר יחס R על \mathbb{N} ע"י הכלל: aRb אם"מ $f(a) \leq f(b)$.
i. הוכיחו שאם f חח"ע אז R יחס סדר חלקי \mathbb{N} .

(א) (10 נק') תהי פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ונגדיר יחס R על \mathbb{N} ע"י הכלל: aRb אם"מ $f(a) \leq f(b)$.

i. הוכיחו שאם f חח"ע אז R יחס סדר חלקי \mathbb{N} .

פתרון: רפלקסיביות: לכל a טבעי מתקיים כי $f(a) = f(a)$ ובפרט $f(a) \leq f(a)$ ולכן aRa .

אנטי סימטריות : נניח a, b טבעיים כך ש $aRb \wedge bRa$ אזי $[f(a) \leq f(b)] \wedge [f(b) \leq f(a)]$ ולכן $f(a) = f(b)$.

אם f חח"ע אזי $a = b$.

טרנזיטיביות: נניח a, b, c ממשים כך ש $aRb \wedge bRc$ אזי $[f(a) \leq f(b)] \wedge [f(b) \leq f(c)]$ כיוון ש"קטן שווה" הוא טרנזיטיבי,

נקבל כי $f(a) \leq f(c)$ מה שגורר ש aRc .

ii. תנו דוגמה ל f שעבורה R אינו יחס סדר חלקי על \mathbb{N} .

(א) (10 נק') תהי פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ונגדיר יחס R על \mathbb{N} ע"י הכלל: aRb אם"מ $f(a) \leq f(b)$.

i. הוכיחו שאם f חח"ע אז R יחס סדר חלקי \mathbb{N} .

פתרון: רפלקסיביות: לכל a טבעי מתקיים כי $f(a) = f(a)$ ובפרט $f(a) \leq f(a)$ ולכן aRa .

אנטי סימטריות סימטריות: נניח a, b טבעיים כך ש $aRb \wedge bRa$ אזי $[f(a) \leq f(b)] \wedge [f(b) \leq f(a)]$ ולכן $f(a) = f(b)$.
אם f חח"ע אזי $a = b$.

טרנזיטיביות: נניח a, b, c ממשים כך ש $aRb \wedge bRc$ אזי $[f(a) \leq f(b)] \wedge [f(b) \leq f(c)]$ כיוון ש"קטן שווה" הוא טרנזיטיבי, נקבל כי $f(a) \leq f(c)$ מה שגורר ש aRc .

ii. תנו דוגמה ל f שעבורה R אינו יחס סדר חלקי על \mathbb{N} .

פתרון: למשל, הפונקציה הקבועה על 1, כלומר, לכל x טבעי נגדיר $f(x) = 1$ ואז לפי הגדרה $1R2$ ו $2R1$ ומכיוון ש $1 \neq 2$ נקבל כי R אינו אנטי סימטרי ובפרט אינו יחס סדר חלקי.

(ב) (10נק') תהא $f: X \rightarrow Y$ פונקציה הפיכה. הוכיחו שלכל $A \subseteq X$ מתקיים כי $f[X \setminus A] = Y \setminus f[A]$.

(א) (10 נק') תהי פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ונגדיר יחס R על \mathbb{N} ע"י הכלל: aRb אם"מ $f(a) \leq f(b)$.

i. הוכיחו שאם f חח"ע אז R יחס סדר חלקי \mathbb{N} .

פתרון: רפלקסיביות: לכל a טבעי מתקיים כי $f(a) = f(a)$ ובפרט $f(a) \leq f(a)$ ולכן aRa .

אנטי סימטריות סימטריות: נניח a, b טבעיים כך ש $aRb \wedge bRa$ אזי $[f(a) \leq f(b)] \wedge [f(b) \leq f(a)]$ ולכן $f(a) = f(b)$. אם f חח"ע אזי $a = b$.

טרנזיטיביות: נניח a, b, c ממשים כך ש $aRb \wedge bRc$ אזי $[f(a) \leq f(b)] \wedge [f(b) \leq f(c)]$ כיוון ש"קטן שווה" הוא טרנזיטיבי, נקבל כי $f(a) \leq f(c)$ מה שגורר ש aRc .

ii. תנו דוגמה ל f שעבורה R אינו יחס סדר חלקי על \mathbb{N} .

פתרון: למשל, הפונקציה הקבועה על 1, כלומר, לכל x טבעי נגדיר $f(x) = 1$ ואז לפי הגדרה $1R2$ ו $2R1$ ומכיוון ש $1 \neq 2$ נקבל כי R אינו אנטי סימטרי ובפרט אינו יחס סדר חלקי.

(ב) (10נק') תהא $f: X \rightarrow Y$ פונקציה הפיכה. הוכיחו שלכל $A \subseteq X$ מתקיים כי $f[X \setminus A] = Y \setminus f[A]$.

פתרון: תהא A ת"ק של X ונראה את השיויון המבוקש ע"י הכלה דו כיוונית.

(\subseteq) יהא $y \in f[X \setminus A]$ אזי קיים $x \in X \setminus A$ כך ש $y = f(x)$. כיוון ש $x \in X$ אזי $y = f(x) \in Y$. בנוסף, $x \notin A$ ו f חח"ע ולכן $f(x) \notin f[A]$ (אחרת $f(x) = f(a)$ עבור $a \in A$ ומחח"ע של f נקבל $x = a \in A$ סתירה). מצירוף השניים נקבל כי $y = f(x) \in Y \setminus f[A]$.

(\supseteq) יהא $y \in Y \setminus f[A]$. כיוון ש $y \in Y$ ו f על, קיים $x \in X$ כך ש $f(x) = y$. כיוון ש $y \notin f[A]$ נקבל כי $x \notin A$ (אחרת $x \in A$ ואז $y = f(x) \in f[A]$ סתירה). קיבלנו כי $x \in X \setminus A$ ולכן $y = f(x) \in f[X \setminus A]$ כנדרש.

(א) נגדיר סדרת קבוצות ע"י $A_1 = \emptyset$ ולכל n טבעי נגדיר $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$.
i. (3 נק') מצאו את A_2, A_3, A_4 .

(א) נגדיר סדרת קבוצות ע"י $A_1 = \emptyset$ ולכן n טבעי נגדיר $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$.

i. (3 נק') מצאו את A_2, A_3, A_4 .

פתרון: מהגדרה

$$A_2 = A_1 \cup \{A_1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$A_3 = A_2 \cup \{A_2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$A_4 = A_3 \cup \{A_3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

ii. (10 נק') הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי ולכל $k < n$ טבעי מתקיים כי $A_k \in A_n$.

(א) נגדיר סדרת קבוצות ע"י $A_1 = \emptyset$ ולכן n טבעי נגדיר $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$.
 i. (3 נק') מצאו את A_2, A_3, A_4 .
פתרון: מהגדרה

$$A_2 = A_1 \cup \{A_1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$A_3 = A_2 \cup \{A_2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$A_4 = A_3 \cup \{A_3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

ii. (10 נק') הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי ולכל $k < n$ טבעי מתקיים כי $A_k \in A_n$.
פתרון: באינדוקציה על n : עבור $n = 1$ אין $k < n$ טבעי ולכן הטענה מתקיימת. כעת נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n + 1$. יהא $k < n + 1$ ונראה כי $A_k \in A_{n+1}$.
 אם $k = n$, אזי, לפי הגדרה $A_n \in \{A_n\} \subseteq A_n \cup \{A_n\} = A_{n+1}$.
 אחרת $k < n$ ואז לפי הנחת האינדוקציה $A_k \in A_n$ כיוון ש $A_n \subseteq A_n \cup \{A_n\} = A_{n+1}$ נקבל כי $A_k \in A_{n+1}$.

מבחן 2018:

(12 נק') קבעו והוכיחו לכל קבוצה אם היא מעוצמת $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$ או סופית.
אם היא סופית רשמו את מספר האיברים בקבוצה.

i. $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

ii. $B \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ אוסף הפונקציות העל מהטבעיים לקבוצה $\{0,1\}$.

iii. $C \subseteq P(\mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$ אוסף הפונקציות ההפיכות מהרציונליים לקבוצת החזקה של הטבעיים.

סעיף א1

$$|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph \leftarrow |\mathbb{Q}| = \aleph_0, |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

סעיף א2

קיימות רק שתי פונקציות לא על מהטבעיים לקבוצה $\{0,1\}$. הורדת מספר סופי של איברים


מקבוצה אינסופית לא משנה את עוצמת הקבוצה. $|B| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

סעיף א3

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ ולכן $|\mathbb{N}| \neq |P(\mathbb{Q})|$ אין פונקציה חח"ע ועל (כלומר: הפיכה) מהרציונליים לקבוצה

$P(\mathbb{N})$.

התשובה היא אפס.



!!! בהצלחה