תרגול 11-אושרית

מרחב העתקות , תרגילי חזרה והתחלת תמורות

הגדרה: יהי V מ"ו ויהי U תת מרחב שלו. יהי B בסיס ל-V. אז **מרחב הקורדינטות** של U לפי B הוא-

$$[U]_B=\{[u]_B : u\in U\}$$

כאמור- כי העתקת קורדינטות היא איזומורפיזם ולכן בהינתן מרחב קורדינטות קל לחשב את המרחב המקורי.

תרגיל: תהי A מטריצה ! f- פונק' שמוגדרת ע"י כפל במטריצה $f(v)=A\cdot v$

מצא $ker(f)=?$, $Im(f)=?$

העתקה

פתרון:

$$ker(f)=\{v\in V \mid Av=0\}=N(A)$$

$$Im(f)=\{Av \mid v\in V\}=C(A)$$

כצירוף ליניארי של עמודות A עם סקלרים מ-V)

משפט: $T: V\to W$ הע"ל, E-בסיס של V, F-בסיס של W.

$$[kerT]_E=N([T]_F^E)$$

$$[ImT]_F=C([T]_F^E)$$

$T(A) = C_1(A) + C_3(A)$ $\quad$ $T: \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^2$ [illegible]

$\mathbb{R}^{2\times 3}$ [illegible]

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underbrace{B}_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$[T]^S_B = ?$

ב) [illegible] של T.

פתרון:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כעת- נבטא כל 1 מהווקטורים הנ"ל כווקטורי קורדינטות של B.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \end{array} \qquad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]^S_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פרטי הוכחת סעיף 1 שיעורי בית- למצוא מטריצה מייצגת חומר של שיעור קודם...

מצא בסיס לגרעין של T.

$$\ker[T]_B^S = N\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & w & t & r \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \\ -r \\ t \\ r \end{pmatrix} \middle| \; z,y,r,t \in R \right\} =$$

$$w + r = 0$$

$$\boxed{w = -r}$$

$$x + z - w - r = 0$$

$$x = -z + w + r$$

$$x = -z + \cancel{r} - \cancel{r}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן

$$\ker T = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Scanned with CamScanner

הבסיס-האיברים שבתוך הספאן

תרגיל:

מצאו דוגמה מפורשת של העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ כך שמתקיים $\operatorname{Im}T=sp\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\5\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

נשים ♡ שכאן פה ימין יצאו וקטורים אלה של התמונה יהיו צירופים לינאריים של $\begin{pmatrix}2\\4\\5\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$

ולכן- נוכל להגדיר $T(x,y,z,w)=x(2,4,5,7)+y(1,2,1,1)$

תרגיל:

מצאו בצורה מפורשת ה"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש- $Ker(T)=span\{(1,3,7),(2,5,6)\}$

$Im(T)=span\{(1,2,3)\}$

פתרון:

נשלים את הוקטורים $(1,3,7),(2,5,6)$ לבסיס

$$\begin{pmatrix}1&3&7\\2&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2=R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&3&7\\0&-1&-8\end{pmatrix}$$

ולכן- נוסיף את $(0,0,1)$

כעת- לפי משפט ההג' נקבל -

$T(1,3,7)=0$

$T(2,5,6)=0$

$T(0,0,1)=(1,2,3)$

מפה נרצה למצוא הצגה מפורשת ולכן-

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&x\\3&5&0&y\\7&6&1&z\end{array}\right)\xrightarrow[R_3=R_3-7R_1]{R_2=R_2-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&x\\0&-1&0&y-3x\\0&-8&1&z-7x\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&x\\0&1&0&3x-y\\0&-8&1&z-7x\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=R_3+8R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&x\\0&1&0&3x-y\\0&0&1&z-7x+24x-8y\end{array}\right)$$

$\alpha_3=17x-8y+z$

$\alpha_2=3x-y$

$\alpha_1=2y-5x$

$\alpha_1+2(3x-y)=x$

$\alpha_1+6x-2y=x$

$\alpha_1=2y-5x$

$$T(x,y,z)=(2y-5x)\overbrace{T(1,3,7)}^{0}+(3x-y)\overbrace{T(2,5,6)}^{0}+(17x-8y+z)T(0,0,1)=$$

$$(17x-8y+z)\cdot(1,2,3)=(17x-8y+z,34x-16y+2z,51x-24y+3z)$$

תרגיל: תהי $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ה"ל המוגדרת ע"י: $T(x,y,z) = (x+y, y+z, 2x-2z)$

מצאו בסיס לגרעין ולתמונה של T.

פתרון:

(1) נמצא מטריצה מייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי, נמצא את התמונה של איברי הבסיס:

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (1,0,2) \\ T(0,1,0) = (1,1,0) \\ T(0,0,1) = (0,1,-2) \end{cases} \Leftarrow \quad [T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

מול בבסיס הסטנדרטי

$\mathrm{Im}(T) = C(T)$ $\qquad$ $\ker T = N(T)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = \frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

משתנה חופשי - z

$$\begin{cases} y+z=0 & x+y=0 \\ y=-z & x=-y \\ & x=z \end{cases} \Leftarrow \quad \ker T = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{B_{\ker T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\mathrm{Im}T = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \boxed{B_{\mathrm{Im}T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

רק עמודות שלאחר דירוג יש בהן איבר מוביל נכנסות לבסיס

תרגיל ממבחן: נגדיר $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ ע"י $T(x,y,z,w)=(x+y,w,0,z)$

א) מצאו את $[T]^n$ לכל n לפי הבסיס הסטנדרטי.

ב) מצאו בסיס לגרעין ולתמונה

ג) נגדיר $E=\{(1,1,0,0),(1,-1,1,1),(0,0,1,2),(0,0,-1,1)\}$ מצא- $[T^3]_E=?$

פתרון:

א)

שלב 1- נמצא מטריצה מייצגת

$$\left.\begin{aligned}T(1,0,0,0)&=(1,0,0,0)\\T(0,1,0,0)&=(1,0,0,0)\\T(0,0,1,0)&=(0,0,0,1)\\T(0,0,0,1)&=(0,1,0,0)\end{aligned}\right\}\Rightarrow[T]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

נתחיל לבצע חישוב חזקות של המטריצה כדי לגלות את החוקיות.

$$[T]^2=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad[T]^3=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad[T]^4=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $[T]^n=[T]^3$ לכל $n\geq3$.

ה נמצא בסיס לתמונה

$$B_{ImT} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker T = N([T]) = \left\{ \begin{pmatrix}-t\\t\\0\\0\end{pmatrix}, t\in R \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \Rightarrow B_{\ker T} = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

הוכחה ש"ב

טענה:

$$[T]_B^n = [T^n]_B$$

ג מתקיים -

$$[I]^E_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן -

$$[T^3] = [I]^S_E \cdot [T]^S_S [I]^E_S = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{יוצא - מסובך .. מעניין לחשב בדיקה ..}}$$

הגד': **תמורה** - תהא X - קב' סופית. תמורה σ על X היא פונק' חח"ע ועל מ-X לעצמה. את אוסף התמורות מסמנים S_X או S_n כאשר $|X|=n$ וניתן להראות באופן קלות כי $|S_n|=n!$

צורת כתיבה:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

דוג':

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

סוגי תמורות:

מחזור: תמורה הפועלת על תת קב' איברים ב-X באופן מעגלי ולא מזיזה את היתר
ניתן לכתוב אותה כ- $(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$ כאשר - $a_1\mapsto a_2\mapsto \dots \mapsto a_k\mapsto a_1$.

לדוג': $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ כתבו בכתיב מחזורים - $(1\ 2)$

חילוף: מחזור של 2 איברים בלבד.

הרכבת תמורות: זהה להרכבת פונק'

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

פירוק תמורה למחזורים זרים וחילופים:

תרגיל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1\,5\,6\,2)(3\,4)$$

הערה: בכתיב מחזורים, נהוג להשמיט מחזור מאורך 1

לדוג: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)$

תמורת הזהות: התמורה $Id \in S_n$ כאשר - $Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$

תמורה הפוכה: לתמורה כלשהי σ היא התמורה $\tau = \sigma^{-1}$ כך ש- $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = id$

לדוג: $\sigma = (1\,2\,3) \in S_4$ **מצא:** $\sigma^{-1} = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ b & c & a & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $b=1$, $c=2$, $a=3$, $d=4$

$\Leftarrow$ $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

טיפ: על מנת למצוא הופכי של מחזור כלשהו, יש להפוך את סדר האיברים במחזור

לדוג (1432) ההופכי הוא $\leftarrow$ (2341)

דוגמא: (2,1)

דוג' (13) ... (1432) והופכי ... (2341)

היפוך סדר: בתמורה - הוא זוג $i,j\in\{1,\dots,n\}$ כך ש- $i<j$ וגם $\sigma(i)>\sigma(j)$

סימן של תמורה: $\forall\sigma\in S_n,\ sign(\sigma)=(-1)^{n(\sigma)}$ כאשר $n(\sigma)$ הוא - מס' היפוכי הסדר ב- σ

זוגיות של תמורה: תמורה σ היא זוגית $\Leftrightarrow$ הסימן שלה הוא 1, אי-זוגית $\Leftrightarrow$ הסימן שלה -1

שיטה נוספת לגילוי הסימן/זוגיות: נרשום את התמורה כפירוק לחילופים ונבדוק את זוגיות
מתאים לזוגיות מס' החילופים.

תכונות: 1) סימן של מחזור מאורך k הוא- $(-1)^{k-1}$

2) סימן של תמורה הוא- מכפלת סימני מחזוריה הזרים.

3) סימן של הרכבת תמורות הוא- מכפלת סימני מרכיביה.

ללא הוכחה עד [illegible]

תרגיל: מצאו את הסימן של $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&5&3&4\end{pmatrix}$

פתרון:

$$sign\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&5&3&4\end{pmatrix}=(12)(354)=-1\cdot 1=\boxed{-1}$$

$$(12)\to(-1)^1=-1 \qquad (354)\to\underbrace{(-1)^{3-1}}_{1}$$

בהצלחה!!!