

אלגברה לינארית להנדסה 83-110
מועד ב' התשע"ו

ד"ר מיטל אליהו רובינסון.
 מתרגלים : אחיה בראון, תמר נחשוני, ביאנה פרידמן ויונתן רוזן

זמן הבחינה : 3 שעות. הקדישו 30 דק' (לכל היותר!) לחלק הראשון ותכננו את חלוקת הזמן!
 מספיקות 40 דק לכל אחת מהשאלות האחרות!
 מותר להשתמש במחשבוניו מדעיים פשוטים בלבד!

ניתן לכתוב משני צידי הדף.
בסוף הבחינה יש דפים נוספים לשימושכם.

הערה: כל המרחבים הוקטוריים בבחינה הם ממימד סופי.

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
הוכחות: שאלות 1-2	
3	
4	
5	
סה"כ	

בס"ד
חלק א' – הוכחה (20 נק' לשאלה)

ענו על אחת בלבד מהשאלות הבאות:

1. נסחו והוכיחו את המשפט : $A \in F^{n \times n}$ לכסינה אמ"ם קיים ל F^n בסיס המורכב מו"ע של A .

2. נסחו והוכיחו את משפט ההגדרה של העתקה לינארית.

המשך תשובה לחלק א'

חלק ב'- שאלות פתוחות – יש לענות על כל השאלות!

3. (20 נק') אין קשר בין הסעיפים!

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases} \quad \text{א. (10 נק') תהי מערכת משוואות}$$

ויהי U אוסף הפתרונות שלה.

$$W = \text{span}\{(1, 0, 0, -1), (1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, -1)\}$$
 ותהי

מצאו בסיס ומימד עבור:

$$U \quad \text{(i)}$$

$$U + W \quad \text{(ii)}$$

$$U \cap W \quad \text{(iii)}$$

ב. (10 נק') הוכח או הפרך:

i. תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש A הפיכה, אזי $N(B) = N(BA)$.

ii. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש $A^2 = 0$, אזי $A + I$ הפיכה.

המשך התשובה לשאלה 3

המשך התשובה לשאלה 3

4. (34 נק') יהי $W = \text{span}\{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, 2, 3)\}$ תת מרחב של $V = \mathbb{R}^3$

א. מצאו בסיס אורתונורמלי: $\{u_1, u_2\}$ ל- W (לפי הסדר הנתון) (4 נק').

ב. השלימו אותו לבסיס אורתונורמלי $\{u_1, u_2, u_3\}$ עבור $V = \mathbb{R}^3$. (4 נק')

ג. תהי $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & -u_2 & -u_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ (הנקודות הן סימן לעמודה) הוכיחו כי מטריצה

זו היא אורתוגונאלית. (4 נק')

ד. נגדיר $T: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ע"י $T(X) = AX$. הוכיחו כי העתקה זו היא חח"ע והוכיחו שהיא איזומורפיזם. (8 נק').

ה. אין קשר לסעיפים קודמים !!

i. ידוע כי עבור מטריצה אורתוגונאלית $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ קיימת מטריצה

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אנטי סימטרית ($A^T = -A$) כך ש $Q = (I - A)(I + A)^{-1}$.

הוכיחו ש $\det Q = 1$. (5 נק')

ii. הוכיחו כי לכל מטריצה אורתוגונאלית $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים ש

$$\|Qv\| = \|v\| \quad (4 \text{ נק'})$$

iii. הוכיחו כי אם λ ע"ע ממשי של מטריצה אורתוגונאלית $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$

מתקיים ש $\lambda = \pm 1$ (5 נק')

המשך התשובה לשאלה 4

המשך התשובה לשאלה 4

5. 26 נק') אין קשר בין הסעיפים:

א. עבור כל $k \in \mathbb{R}$ מצאו את כל הע"ע הממשיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ורשמו עבור אלו ערכי $k \in \mathbb{R}$ המטריצה לכסינה מעל

הממשיים? נמקו!! (10 נק')

ב. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n > 1$) כך ש $\text{rank}(A) = 1$.

הוכחו: או ש- A לכסינה או ש $A^n = 0$ (10 נק').

ג. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. מצאו מטריצה $B \neq 0$ עבורה $AB = BA = 0$ (6 נק').

המשך תשובה לשאלה 5

המשך תשובה לשאלה 5

המשך תשובה

המשך תשובה

המשך תשובה

המשך תשובה