פתרון בוחן בלינארית 1

88-112 סמסטר א' תש"פ

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק.
משך הבוחן: 75 דקות.
חומר עזר: מחשבון פשוט.

1. נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x+y+z+w &= 1 \\ x+ky+z+w &= 1 \\ x+y+z^2z+w &= k \end{cases}$$

קבעו ונמקו עבור אילו ערכי k יש למערכת

(א) פתרון יחיד

(ב) אינסוף פתרונות

(ג) אין פתרון

פתרון:

נרשום את המערכת המשוואות כמטריצה ונדרג אותה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 & 1 & k \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 & 0 & k-1 \end{array}\right)$$

אם $k=-1$ אז בשורה השלישית יהיה רשום $0=-2$ לכן במצב זה נקבל שאין פתרון, אם $k=1$ אז השורות השנייה והשלישית מתאפסות יש לנו אינסוף פתרונות עם 3 דרגות חופש, ואם $k\neq 1,-1$ אז אף שורה אינה מתאפסת אבל עדיין המערכת עם 4 משתנים ושלוש משוואות לכן יש לנו אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת, לסיכום:

(א) פתרון יחיד : ϕ

(ב) אינסוף פתרונות: $k\neq -1$

(ג) אין פתרון: $k=-1$

2. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $A+A^2$ הפיכה אז A^2 הפיכה.

(ב) אם A הפיכה אז $A+A^2$ הפיכה.

(ג) אם ל-A יש עמודת אפסים אזי A אינה הפיכה.

פתרון:

(א) הוכחה: מתקיים $A+A^2=A\left(I+A\right)$ וראינו שאם מכפלת מטריצות היא הפיכה אז כל אחת מהמטריצות הפיכה. לכן A הפיכה. מכפלת הפיכות היא הפיכה ולכן גם A^2 הפיכה.

(ב) הפרכה: ניקח $A=-I$ שהיא הפיכה. נקבל ש־$A^2=I$ כלומר $A+A^2=0$ לא הפיכה.

(ג) הוכחה: נניח בשלילה שהיא הפיכה ונניח שעמודת האפסים היא i. אזי קיימת מטריצה B כך ש־ $AB=I$. לפי כפל עמודה עמודה נקבל

$$C_i\left(BA\right)=C_i\left(I\right)$$
$$\Downarrow$$
$$BC_i\left(A\right)=e_i$$
$$\Downarrow$$
$$0=B\cdot 0=e_i$$

בסתירה לכך ש $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=e_i$.

3. הוכיחו את הטענות הבאות (אין קשר בין הסעיפים):

(א) $U=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}|\forall i\neq j:A_{i,j}=0\}\leq\mathbb{R}^{n\times n}$ כלומר, אוסף המטריצות האלכסוניות הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(ב) יהי V מ"ו ותהא $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ קבוצה פורשת של V (כלומר $span(S)=V$). אזי $S'=\{v_1,v_2,v_1+v_3\}$ גם קבוצה פורשת (כלומר $span(S')=V$).

פתרון:

(א) נוכיח לפי הקריטריון המקוצר לתת מרחב.

ראשית, מטריצת האפס היא אלכסונית, ולכן $0 \in U$. כעת נראה סגירות לחיבור וכפל בסקלר:

יהיו $A_1, A_2 \in U, \alpha \in \mathbb{R}$ צריך להראות שלכל $i \neq j$ מתקיים $(A_1 + \alpha A_2)_{i,j} = 0$. מחוקי חיבור מטריצות וכפל בסקלאר נקבל ש-

$$(A_1 + \alpha A_2)_{i,j} = (A_1)_{i,j} + \alpha (A_2)_{i,j} \overset{*}{=} 0 + \alpha \cdot 0 = 0$$

כאשר השיוויון $*$ נובע מכך ש-A_1, A_2 אלכסוניות (שייכות ל-U).

(ב) צריך להוכיח כי $span(S') = V$, כלומר שלכל $v \in V$, $v \in span\,(S')$, כלומר ניתן להציג אותו כצ"ל של איברי S'.

יהא $v \in V$. לפי הנתון קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v$. ולכן גם $(\alpha_1 - \alpha_3)v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 (v_1 + v_3)$ הוא צ"ל של איברי S' ששוה ל v.