פתרון תרגיל בית 1 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ז

שאלה 1. * ענו עבור כל אחת מן המערכות האלגבריות הבאות:
האם היא חבורה למחצה?
האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?
האם היא חבורה?
האם הפעולה היא חילופית?

א. $(\mathbb{N},*)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a*b=a+b+a$.

ב. $(\mathbb{Q}\setminus\{-1\},*)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a*b=a+b+ab$.

ג. $(\mathbb{N},\max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ד. $(5\mathbb{Z},\cdot)$, המספרים השלמים הזוגיים עם פעולת הכפל הרגילה.

ה. $(\mathbb{R},*)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a*b=\sqrt{a+b}$.

ו. תהי X קבוצה. $(P(X),\triangle)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X. הפעולה היא *ההפרש הסימטרי* המוגדר לכל $A,B\in P(X)$ לפי $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

ז. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2>0\right\}$$

ח. $(A,\cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

פתרון. לא נציין מפורשות בכל סעיף שאם מבנה אלגברי הוא חבורה, אז הוא גם מונואיד, ולכן גם חבורה למחצה. ולהפך, אם הוא לא חבורה למחצה, אז ודאי שהוא גם לא מונואיד וכו'.

א. מבנה זה הוא חבורה למחצה כי ישנה סגירות והפעולה קיבוצית, שכן מתקיים $(a*b)*c = a+b+c+4 = a*(b*c)$. הפעולה חילופית עקב חילופיות החיבור הרגיל בטבעיים. לא מדובר במונואיד כי אילו היה איבר יחידה, אזי הוא היה -2 שאינו מספר טבעי.

ב. מבנה זה הוא חבורה, בשונה מן הסעיף הקודם. איבר היחידה הוא $e = -2$. האיבר ההופכי של a הוא $-a-4$. הפעולה חילופית.

ג. הסגירות של הפעולה ברורה. הפעולה קיבוצית כי

$$\max\{\max\{a,b\},c\} = \max\{a,b,c\} = \max\{a,\max\{b,c\}\}$$

איבר היחידה הוא 1 כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\max\{n,1\} = \max\{1,n\} = n$. אין הפיך לאף איבר פרט ל-1, ולכן מדובר במונואיד. הפעולה חילופית.

ד. הפעולה סגורה כי כפל של מספרים שלמים זוגיים הוא שלם זוגי. הפעולה קיבוצית כי פעולת הכפל הרגילה של מספרים היא קיבוצית. לא קיים איבר יחידה, שכן אם $a \in 2\mathbb{Z}$ היה איבר יחידה אז יתקיים $2 \cdot a = 2$, ונקבל כי $a = 1 \notin 2\mathbb{Z}$. לכן מבנה זה הוא חבורה למחצה.

ה. הפעולה לא סגורה, למשל $0 * -1 = \sqrt{0-1} \notin \mathbb{R}$. גם אילו הקבוצה הייתה $\mathbb{C}$, אפשר לשים לב שהפעולה אינה קיבוצית. לכן $(\mathbb{R}, *)$ אינה חבורה למחצה. הפעולה חילופית.

ו. מבנה זה הוא חבורה. סגירות נובעת מכך שאם $A, B \in P(X)$, אז גם $A \triangle B$ היא תת קבוצה של X. קיבוציות הפעולה ידועה ממתמטיקה בדידה. איבר היחידה הוא הקבוצה הריקה. קל לבדוק שכל איבר הוא ההופכי של עצמו. הפעולה (כפי ששמה רומז) היא חילופית.

ז. הפעולה לא סגורה, למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A$$

ולכן לא מדובר בחבורה למחצה. הפעולה חילופית.

ח. מבנה זה הוא חבורה. הסגירות לא מיידית, שכן לא מספיק להראות שמכפלת שני איברים הוא מטריצה, אלא מטריצה ששייכת ל-A:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & bc+ad \\ -(bc+ad) & ac-bd \end{pmatrix}$$

ולשים לב כי $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$ שהיא הדטרמיננטה של המכפלה היא מכפלה של דטרמיננטות חיוביות, ולכן חיובית בעצמה. הפעולה קיבוצית כי כפל מטריצות הוא קיבוצי. איבר היחידה הוא מטריצת היחידה I_2. כל מטריצה במבנה זה היא הפיכה מפני שמתקיים $a^2+b^2>0$ שהיא הדטרמיננטה, כשהאיבר ההופכי הוא

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ודאו למה מטריצה זו שייכת למבנה. בדיקה ישירה תראה שהפעולה חילופית.

שאלה 2. ** תהא S חבורה למחצה. הוכיחו שאפשר להרחיב אותה למונואיד שאיבריו $M=S\cup\{e\}$ עם איבר חדש $e\notin S$ כשהפעולה היא הרחבה של הפעולה של S באופן כזה ש-e הוא איבר היחידה במבנה החדש. (יש להראות שהפעולה במבנה החדש היא קיבוצית).

ניח שחוזרים על הבניה הזאת n פעמים, כלומר $M_1=S\cup\{e_1\}$ ואז $M_2=M_1\cup\{e_2\}$ ואז ... $M_n=M_{n-1}\cup\{e_n\}$. עבור $i\le j$ למה שווה המכפלה e_ie_j? ומה לגבי e_je_i?

תארו את המונואיד M_n אם מתחילים מהחבורה למחצה $S=\{0\}$.

פתרון. הפעולה החדשה ברורה: לכל $a\in M$ נגדיר כי הכפל עם e הוא $ae=ea=a$.

נראה שהפעולה במבנה החדש נשארת קיבוצית. נתון שאם $a,b,c\in S$, אז מתקיים $a(bc)=(ab)c$. צריך לבדוק מה יקרה אם במשוואה האחרונה נרשה כי a,b,c הם e (אם יותר מאחד מהם הוא e, נשתמש ב-$ee=e$). אם $a=e$, אז

$$e(bc)=bc=(eb)c$$

ואם $b=e$, אז $a(ec)=ac=(ae)c$, ובאופן דומה גם אם $c=e$.

כעת נניח שבנינו את M_n , כדי לדעת מה היא המכפלה e_ie_j ו-e_je_i, כאשר $i\ge j$, צריך לבדוק מה קורה בחזרה ה-i על הבנייה. נקבל כי $e_ie_j=e_je_i=e_j$. לכן באופן כללי

$$e_ie_j=e_je_i=e_{\min\{i,j\}}$$

שאלה 3. * יהי M מונואיד, ו $a\in M$ איבר. נגדיר באינדוקציה את פעולת החזקה $a^{n+1}=a^n\cdot a$ כאשר $a^1=a$.

הוכיחו כי מתקיים:

1. $a^na^m=a^{n+m}$ עבור $n,m\in\mathbb{N}$.
2. $(a^n)^m=a^{nm}$ עבור $n,m\in\mathbb{N}$.
3. נניח כי a הפיך, $(a^n)^{-1}=(a^{-1})^n$ עבור $n\in\mathbb{N}$.

פתרון. 1. לפי ההגדרה $a^n a^m = (\underbrace{aaa\cdots a}_{n})(\underbrace{aa\cdots a}_{m})$ ולפי תכונת האסוציאטיביות זה שווה ל $\underbrace{aa\cdots aa}_{m+n} = a^{n+m}$.

2. באופן דומה $(a^n)^m = \underbrace{a^n a^n \cdots a^n}_{m} = (aa\cdots a)\cdots(aa\cdots a) = \underbrace{aaa\cdots aa}_{mn} = a^{mn}$.

3. מתקיים $(a^{-1})^n a^n = a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1}aa\cdots a = e$ ולכן $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.

שאלה 4. ** תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a,b \in G$ מתקיים כי $(ab)^2 = a^2b^2$.

פתרון. לכל זוג איברים $a,b \in G$ מתקיים $(ab)^2 = abab = aabb = a^2b^2$. נכפיל משמאל ב-$a^{-1}$ ומימין ב-b^{-1} ונקבל

$$a^{-1}ababb^{-1} = ba = ab = a^{-1}aabbb^{-1}$$

כלומר $ba = ab$.

שאלה 5. ** תהי G חבורה. נסמן $m_2 = |\{x \in G : x^2 = e\}|$.

א. הראו שבכל חבורה סופית מתקיים: $m_2 \equiv |G| \mod 2$.

ב. הראו שבכל חבורה עם מספר זוגי של איברים קיים איבר $x \neq e$ המקיים $x^2 = e$.

הדרכה לסעיף א': הסתכלו על יחס השקילות הבא על G: $x \equiv y \iff x = y \vee xy = e$. מה הגודל של כל מחלקת שקילות?

פתרון. א. נתכל על יח"ש על G $x \equiv y \iff x = y \vee xy = e$. כלומר כל איבר שקול לעצמו ולהופכי שלו.

נשים לב שאיבר הוא ההפכי של עצמו אם ורק אם הוא מקיים $x^2 = e$. ולכן מחלקת שקילות של x היא או מגודל 1 (אם $x^2 = e$) או מגודל 2 (אם $x^2 \neq e$).

מכיוון שקבוצה היא איחוד מחלקות השקילות שלה: $|G| = m_2 + 2r$ כאשר r הוא מספר המחלקות השונות מגודל 2 .

מכאן ש $|G| \equiv m_2 \pmod 2$.

ב.לפי הסעיף הקודם, מכיוון ו$|G|$ זוגי, כך גם m_2.

תמיד מתקיים ש $m_2 \geq 1$ כי e מקיים את הדרישה ש $e^2 = e$. ולכן אצלנו נסיק ש $m_2 \geq 2$ ולכן חייב להיות עוד איבר חוץ מהיחידה המקיים את התכונה.

שאלה 6. * קבעו (והוכיחו את קביעתכם) האם התת קבוצות הבאות הן תת חבורות של החבורות הנתונות או לא:

1. $O_n(F) = \left\{A \in GL_n(F) \,|\, A^T = A^{-1}\right\} \subseteq GL_n(F)$ המטריצות האורתוגונליות.

2. $\{A \in F^{n\times n} \,|\, detA = 0\} \subseteq F^{n\times n}$.

3. עבור חבורה כלשהי G: $\Delta = \{(a,a) \,|\, a \in G\} \subseteq G \times G$.

4. עבור חבורות G_1, G_2 ותתי חבורות H_1, H_2 בהתאמה: $H_1 \times H_2 \subseteq G_1 \times G_2$.

הערה: הפעולה ב $G_1 \times G_2$ היא כפל "רכיב-רכיב" (מה שאתם מדמיינים שזה- אז זה זה).

שאלה 7. * מצאו את לוח הכפל של חבורה מגודל 6 המכילה איברים σ, τ, e המקיימים $\sigma^3 = e,\ \tau^2 = e$ ו $\sigma\tau = \tau\sigma$.
בתור התחלה, שימו לב שכל איבר ניתן לרשום באופן מייצג בצורה $\tau^i\sigma^j$עבור $i = 0, 1$ ו $j = 0, 1, 2$. בעזרת הנתונים אפשר למצוא את טבלת הכפל המלאה של החבורה.

פתרון.

	e	σ	σ^2	τ	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$
e	e	σ	σ^2	τ	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$
σ	σ	σ^2	e	$\tau\sigma^2$	τ	$\tau\sigma$
σ^2	σ^2	e	σ	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$	τ
τ	τ	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$	e	σ	σ^2
$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$	τ	σ^2	e	σ
$\tau\sigma^2$	$\tau\sigma^2$	τ	$\tau\sigma$	σ	σ^2	e

שאלה 8 (אתגר). ***הוכיחו שאם בחבורה למחצה S יש פתרון לכל משוואה מן הצורה $ax = b$ או $xa = b$, אז זו חבורה. (רמז: לפי ההנחה יש איבר $e \in S$ (התלוי ב-a) כך ש-$ae = a$. לכל $c \in S$ קיים x כך ש-$c = xa$, ואז $ce = xae = xa = c$, ולכן e הוא יחידה מימין. באופן דומה יש יחידה משמאל.)

פתרון. נשתמש ברמז, ולפי הנחה יש פתרון למשוואה $ax = a$. נניח כי e הוא פתרון (התלוי ב-a). נשים לב כי לכל $c \in S$ מתקיים כי קיים פתרון x למשוואה $xa = c$. לכן

$$ce = (xa)e = x(ae) = xa = c$$

וקיבלנו כי e הוא יחידה מימין. באופן דומה יש פתרון e' למשוואה $xa = a$. לכל $c \in S$ קיים פתרון x למשוואה $ax = c$, ומתקיים כי

$$e'c = e'(ax) = (e'a)x = ax = c$$

ולכן e' יחידה משמאל. אבל אם קיימים איברי יחידה מימין ומשמאל, אז יש איבר יחידה יחיד. נסמן אותו ב-e. לפי הנתון יש פתרון למשוואות $cx = e$ ו-$xc = e$, כלומר קיים הופכי משמאל ומימין לכל איבר $c \in S$. לכן כל איבר $c \in S$ הוא הפיך.

בהצלחה!