

בוחר באנליזה מודרנית

מועד ב'

מרצה: ד"ר שמעון ברוקס.
מתרגלים: הראל רוזנפלד, עידו שפרינגר
יש לענות על כל השאלות. לרשותכם שעה וחצי.

שאלה 1 (40 נק')

תהי $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת פונקציות רציפות על הקטע $[0, 1]$. הוכיחו כי הקבוצה

$$A = \left\{ x : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \right\}$$

מדידה לבג.

שאלה 2 (25 נק')

יהי (X, S) מרחב מדיד ו- $f_1, f_2, f_3 : X \rightarrow \mathbb{R}$ מדידות- S . התבוננו בפולינום הבא המוגדר לכל $x \in X$: $f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x)$. הראו שקבוצת כל האיברים ב- X עבורם יש לפולינום שני שורשים שונים היא מדידה.

שאלה 3 (40 נק')

תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אי-שלילית אינטגרבילית לבג. נגדיר $F(x) = \int_{-\infty}^x f dm$. הראו כי F רציפה.