אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 1

1. הראו כי האיברים ההפיכים היחידים ב $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi : a,b\in\mathbb{Z}\}$ הם $\pm1,\pm i$.
2. הראו שלכל $a\in R$, האיבר ax אינו הפיך בחוג טורי טיילור $R[[x]]$ כאשר R חוג קומוטטיבי עם יחידה.בנוסף, הראו שלכל $a\in R$, האיבר $1+ax$ הפיך ב $R[[x]]$.
3. הוכח כי אם בחוג R, לכל $x\in R$ מתקיים $x^2=x$ אזי R קומוטטיבי. [רמז: מהו $(x+y)^2$?]
4. תהי S קבוצה. נסמן $R=P(S)$ (קבוצת החזקה). בכל סעיף אמור האם R הוא חוג בהינתן הפעולות הנתונות. אם כן אז אמור מהו איבר אפס ומהו איבר היחידה ותן נוסחא לאיבר הנגדי:
   a. $A+B=A\cup B$, $A\cdot B=A\cap B$.
   b. $A+B=A\cup B\setminus(A\cap B)$, $A\cdot B=A\cap B$.
5. יהי R חוג ויהי איבר $0\neq z\in R$ שעבורו קיים $w\neq 0$ כך ש $zwz=0$. הוכח או הפרך:
   a. z מחלק אפס.
   b. $zw=wz=0$.
6. האם הקבוצות הבאות של מטריצות מהוות חוגים לפי הפעולות הסטנדרטיות כאשר F שדה:
   a. $M_2(F)\supseteq\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right\}=A$.
   b. $M_2(F)\supseteq\left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & c \end{pmatrix}\right\}=A$.
7. מצאו את כל תת-החוגים של $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4$ [חיבור וכפל רכיב-רכיב]. אמרו לאילו מהם יש יחידה ולאילו אין.