## תרגיל 4 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. מצאו את שדה הפיצול של הפולינומים הבאים וחשבו את המימד שלהם (מעל $\mathbb{Q}$).

(א) $x^7-5$.

**פתרון:** אם $\rho$ הוא שורש 7 פירימיטבי של 1 אז השורשים הם

$$\sqrt[7]{5}, \sqrt[7]{5}\rho, \ldots, \sqrt[7]{5}\rho^6$$

קל להוכיח שהסיפוח של כולם נותן בעצם את השדה

$$\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5},\rho)$$

המימד של $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$ הוא 7. המימד של $\mathbb{Q}(\rho)$ הוא 6 (כי $\sum_{k=1}^{6} x^k$ הוא פולינום אי פריק) ובגלל שהם זרים נקבל ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5},\rho):\mathbb{Q}]=42$$

(ב) $x^6-x^3-2$.

**פתרון:** נציב $t=x^3$ ונפתור את המשוואה. נקבל שני פתרונות

$$t=-1,2$$

כלומר

$$x^3=-1,2$$

נסמן ב $\rho$ שורש פרימיטיבי מסדר 6 של 1. אז כל השורשים הם:

$$\rho,\rho^2,\rho^3=-1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\rho^2, \sqrt[3]{2}\rho^4$$

מכאן קל לבדוק ששדה הפיצול הוא בעצם.

$$\mathbb{Q}(\rho,\sqrt[3]{2})$$

את $\rho$ מאפס הפולינום $x^3+1$ שהוא פריק ומתפרק ל

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

ולכן $x^2-x+1$ הוא הפולינום המינימלי של $\rho$ ו

$$[\mathbb{Q}(\rho):\mathbb{Q}]=2$$

כמו כן ברור ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=3$$

ושוב בגלל שהמספרים זרים נקבל

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\rho):\mathbb{Q}]=6$$

(ג) $(x^2+1)(x^3-1)$.

**פתרון:** נסמן ב $\rho$ שורש פרימיטיבי מסדר 3 של 1 אז השורשים של הפולינום הם

$$\pm i, \rho, \rho^2, 1$$

נסמן ב $E$ את שדה הפיצול. כעת, נשים לב ש

$$\frac{\rho}{i} = -i\rho \in E$$

הוא שורש פרימיטיבי מסדר 12 של 1. מכאן קל להסיק ש

$$E = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{12}})$$

וכבר חישבנו בעבר ש

$$[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{12}}) : \mathbb{Q}] = 4$$

2. כמה תתי שדות של $\mathbb{C}$ איזומורפיים ל $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$? מצאו אותם.

**פתרון:** נניח ש $K \subseteq \mathbb{C}$ איזומורפי ל $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ע"י האיזומורפיזם $f : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \to K$ אז כפי שראינו $f(x) = x$ לכל $x \in \mathbb{Q}$ ובנוסף $\sqrt[3]{5}$ נשלח לשורש של $x^3 - 5$. יש רק שלושה שורשים:

$$\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}\rho, \sqrt[3]{5}\rho^2$$

כאשר $\rho$ שורש פרימיטיבי מסדר 3. כלומר $K$ אמור להכיל את אחד מבין

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}\rho), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}\rho^2)$$

משיקולי מימד $K$ שווה לאחד מהם (גם $K$ צריך להיות ממימד 3 מעל $\mathbb{Q}$) אז אלה 3 האופציות שיש לנו. נותר לוודא שאלה באמת 3 שדות שונים. ברור ש $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$שונה משני האחרים כי הוא מוכל ב $\mathbb{R}$. כעת, אם

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}\rho) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}\rho^2) = K$$

אז קל להסיק ש

$$\rho = \frac{(\sqrt[3]{5}\rho^2}{(\sqrt[3]{5}\rho} \in K$$

ולכן גם

$$\sqrt[3]{5} \in K$$

אבל בגלל שגם $K$ ממימד 3 נקבל $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ סתירה.

3. תהי $K \subseteq F$ הרחבת שדות ויהיו $f, g$ שני פולינומים מעל $F$ עם שדות פיצול $L_1, L_2$.
הוכיחו כי התת שדה של $K$ הכי קטן שמכיל את $L_1$ ו $L_2$ הוא גם שדה פיצול מעל $F$ (של פולינום כלשהוא).

**פתרון:** יהי $L$ שדה הפיצול של המכפלה $f \cdot g$ (מעל $F$). מצד אחד כל השורשים של $f, g$ נמצאים ב $L$ ולכן $L$ מכיל את $L_1, L_2$. מצד שני, אם $R$ הוא שדה אחר שמכיל את $L_1, L_2$ אז הוא מכיל גם את כל השורשים של $f, g$ ולכן הוא מפצל את $f \cdot g$. לכן לפי ההגדרה של שדה פיצול $L \subseteq R$ כנדרש.

4. תהי $F \subseteq L \subseteq F(a)$ ונניח ש $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} \ldots + a_n$ הוא הפולינום המינימלי של $a$ **מעל** $L$. הוכיחו כי

$$L = F(a_1, \ldots, a_n)$$

(א) נגדיר $K = F(a_1, \ldots, a_n)$. כמובן ש $K \subseteq L$. נשים לב $f(x) \in K[x]$ הוא כמובן אי פריק גם מעל $K$ ($K$ הרי קטן מ $L$) ולכן וודאי ש $f(x)$ הוא הפולינום המינימלי של $a$ מעל $K$. מכאן

$$[F(a) : K] = \deg f = [F(a) : L]$$

אבל

$$[F(a) : K] = [F(a) : L][L : K]$$

ולכן

$$L = K$$

כנדרש.