תרגיל 7-מתמטיקה בדידה

שאלה 1. יהי (A,R) קס"ח. נגדיר את היחס: $R^{-1} := \{(b,a) : (a,b) \in R\}$.

א. הראו כי (A,R^{-1}) קס"ח.

ב. הראו כי אם קיים $a \in A$ כך שלכל $b \in A$ מתקיים $a \mathrel{\mathrm{R}} b$ או $a = b$ (איבר כזה נקרא מינמום ביחס ל R) אזי קיים $c \in A$ כך שלכל $b \in A$ מתקיים: $b \mathrel{\mathrm{R}^{-1}} c$ או $c = b$.

ג. נסתכל על הקס"ח $\mathcal{P}(\{0,1,2,3\}, \subseteq)$. ציירו את דיאגרמת הסה של הקס"ח $\mathcal{P}(\{0,1,2,3\}, \subseteq^{-1})$.

שאלה 2. נסתכל על הקבוצה הבאה: $\mathbb{N}^{\uparrow}_{\text{seq}} := \{\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle \subseteq \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ (x_n \le x_{n+1})\}$
ונגדיר עליה יחס $\preceq$ באופן הבא:

$$x = \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle \preceq y = \langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle \;\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall m > n\,(x_m < y_m)$$

א. הראו כי $(\mathbb{N}^{\uparrow}_{\text{seq}}, \preceq)$ קס"ח.

ב. הוכיחו או הפריכו: $\exists x \neq y \in \mathbb{N}^{\uparrow}_{\text{seq}} : (x \not\preceq y) \wedge (y \not\preceq x)$ כלומר, לא "שלם".

שאלה 3. נכליל את היחס הלקסיקוגרפי, נסתכל על הקבוצה: $\mathbb{N}^n := \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \mathbb{N}}_{n\ times}$. נגדיר עליה את היחס $<$ באופן הבא:

$$a = (a_1, \cdots, a_n) < b = (b_1 \cdots b_n) \;\Leftrightarrow\; \exists k \le n : (\forall i < k\,(a_i = b_i)) \wedge (a_k < b_k)$$

א. הוכיחו או הפריכו כי $(\mathbb{N}^n, <)$ קס"ח.

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל $a \neq b \in \mathbb{N}^n$ מתקיים: $a < b$ או $b < a$.

ג. עבור המקרה $n = 2$ נסו לצייר את דיאגרמת הסה המתאימה.

שאלה 4. יהי X קבוצה. נגדיר את הקבוצה $\mathcal{R}$ להיות קבוצת כל היחסים החלשים על X. כעת נגדיר יחס $\sqsubseteq$ על $\mathcal{R}$.
עבור $\le$ ו- $\trianglelefteq$ יחסים חלשים על X מתקיים:

$$\le \sqsubseteq \trianglelefteq \;\Leftrightarrow\; \forall x, y \in X (x \le y \to x \trianglelefteq y)$$

א. האם $(\mathcal{R}, \sqsubseteq)$ קס"ח? אם כן הוכיחו, אם לא תנו דוגמא נגדית.

ב. האם ב- $(\mathcal{R}, \sqsubseteq)$ כל שני איברים מתייחסים אחד לשני? (כלומר; שלם).

שאלות רשות.

א. הראו כי קיים m טבעי כך שלכל $m \le n$ טבעי מתקיים:

$$n^3 < 2^n$$

ב. יהי $\mathbb{R}[x]$ קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים ממשים. נגדיר עליה את היחס $\sqsubseteq$. עבור f, g פולינומים עם מקדמים ממשיים:

$$f \sqsubseteq g \;\Leftrightarrow\; \exists x \in \mathcal{R} : \forall y \ge x\,(f(y) \le g(y))$$

האם $(\mathbb{R}, \sqsubseteq)$ קס"ח? האם תוכלו להוכיח כי $\sqsubseteq$ שלם?