תרגול כיתה 11 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
פונקציה יוצרת מומנטים, משפט הגבול המרכזי, אי-שוויונים הסתברותיים

פונקציה יוצרת מומנטים

פונקציה יוצרת מומנטים – הגדרה:

$$M_X(t)=E(e^{tX})$$

שימושי פונקציה יוצרת מומנטים:

1. יצירת המומנט מסדר r ‏(r=1,2,3…) של X:

$$\left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0}=E\left(X^r\right)$$

הערה – מומנט ראשון: הוא התוחלת; מומנט שני: מגדיר את השונות ומאפשר חישובה.

2. פונקציה יוצרת מומנטים מגדירה באופן חד-חד-ערכי התפלגות. כלומר, לכל התפלגות יש רק פונקציה יוצרת מומנטים יחידה. לכן בשאלות של זיהוי התפלגות ניתן לחשב את פונקציה יוצרת המומנטים המתאימה.

3. יהיו $X_1,X_2,...,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים עם פונקציות יוצרות מומנטים, $M_{X_1}(t),M_{X_2}(t),...,M_{X_n}(t)$, בהתאמה, אזי $M_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t)$.

בפרט, לשני משתנים X ו-Y בלתי תלויים: $M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)$

שאלה 1

יהי X משתנה מקרי בינומי עם פרמטרים n ו- p.

א. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים שלו.

ב. חשב בעזרת הפי"מ את התוחלת ואת השונות של X.

ג. יהיו $X\sim Bin(n,p),\ \ Y\sim Bin(m,p),\ \ Z\sim Bin(k,p)$. X,Y,Z ב"ת.
מהי ההתפלגות של המ"מ W, השווה לסכום W=X+Y+Z.

פתרון:

א). חישוב לפי הגדרת פי"מ:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{k=0}^{n}e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^t)^k(1-p)^{n-k}=(pe^t+1-p)^n$$

ב). התוחלת:

$$M'(t)=n(pe^t+1-p)^{n-1}pe^t$$

$$\Rightarrow\ E(X)=M'(0)=np$$

השונות:
תחילה נחשב את המומנט השני בעזרת הפי"מ-

$$M''(t)=n(n-1)(pe^t+1-p)^{n-2}(pe^t)^2+n(pe^t+1-p)^{n-1}pe^t$$
$$\Rightarrow\ E(X^2)=M''(0)=n(n-1)p^2+np$$

ומכאן השונות של X נתונה ע"י:

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=$$
$$=\left[n(n-1)p^2+np\right]-n^2p^2=np(1-p)$$

ג). נעזר בפי"מ של מ"מ מההתפלגות הבינומית,

$$M_W(t)=M_{X+Y+Z}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)\cdot M_Y(t)$$
$$=(pe^t+1-p)^n(pe^t+1-p)^m(pe^t+1-p)^k$$
$$=(pe^t+1-p)^{n+m+k}$$

כלומר, קיבלנו ש- $M_W(t)=(pe^t+1-p)^{n+m+k}$ וזוהי צורת פונקציה יוצרת מומנטים של התפלגות בינומית עם הפרמטרים m+n+k ו- p, ולכן זוהי ההתפלגות של W, $W\sim Bin(n+k+k,p)$.

<u>שאלה 2</u>

נתון $X\sim N(0,1)$.

חשב את הפונ' יוצרת המומנטים של המ"מ $Y=Z^2$.

יהיו $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ סדרת מ"מ ב"ת ושווי התפלגות כפי שהוגדר בסעיף א'.

מצא את ההתפלגות של $W=\sum_{i=1}^{n}Y_i$.

<u>פתרון:</u>

א). פונקציית הצפיפות של X היא נורמלית- $(-\infty<x<\infty)\qquad f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

נפתח לפי ההגדרה את הפי"מ,

$$M_Y(t)=M_{X^2}(t)=E\left(e^{tX^2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2(1-2t)/2}dx$$

האינטגרל מסורבל לחישוב ישיר, לכן נרצה להשלים לפונ' צפיפות מוכרת – שאז האינטגרל שלה שווה ל- 1.

נציב $\sigma^2=1/(1-2t)$ ונקבל:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2\sigma^2}dx=\sigma\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2\sigma^2}dx}_{1}=\sigma$$

האינטגרל הנ"ל שווה ל-1 משום שהוא אינטגרל של פונ' צפיפות של מ"מ המתפלג $N\left(0,\sigma^2\right)$.

נציב חזרה $\sigma^2 = 1\big/\left(1-2t\right)$ ונקבל את הפי"מ של Y:

$$M_Y\left(t\right) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{1-2t}} = \left(1-2t\right)^{-1/2} \qquad \left(t < 1/2\right)$$

הערה: הפי"מ שקיבלנו מתאימה להתפלגות חי-בריבוע עם דרגת חופש אחת, לכן ניתן לקבוע ש- Y מתפלג חי-בריבוע (עם ד"ח 1), $Y \sim \chi^2_{(1)}$.

ב). נכליל את תוצאת סעיף א', שוב בעזרת פי"מ.

$$M_W = M_{\sum_{i=1}^{n} Y_i} \overset{(*)}{=} M_{Y_1} \cdot M_{Y_2} \cdots M_{Y_n} \overset{(**)}{=} \left(M_{Y_1}\right)^n$$

כאשר, במעבר (*) השתמשנו בעובדה שהמ"מ ב"ת. במעבר (**) השתמשנו בעובדה שהם שווי התפלגות. בעזרת תוצאת סעיף א', נקבל:

$$M_W = \left(M_{Y_1}\right)^n = \left(\left(1-2t\right)^{-1/2}\right)^n = \left(1-2t\right)^{-n/2}$$

לכן ניתן לקבוע ש- W מתפלג חי-בריבוע (עם n ד"ח), $W \sim \chi^2_{(n)}$.

נדגים את מציאת התוחלת של W בעזרת הפי"מ:

מצאנו ש- $M_W = \left(1-2t\right)^{-n/2}$

נגזור את הפי"מ ונציב $t = 0$:

$$\frac{dM_W}{dt} = \frac{d\left(1-2t\right)^{-n/2}}{dt} = n\left(1-2t\right)^{-\frac{n}{2}-1}$$

$$E\left(W\right) = \left.\frac{dM_W}{dt}\right|_{t=0} = n\left(1-2\cdot 0\right)^{-\frac{n}{2}-1} = n$$

משפט הגבול המרכזי

יהיו $X_1,...,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות, עם תוחלת μ ושונות σ^2. אזי עבור n מספיק גדול (מקובל $n \geq 30$) מתקיים בקירוב:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

$$(2) \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

הקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית

אם- $X \sim Bin(n,p)$ ומתקיים $n \geq 30$, אזי- $X \sim N\left(np, npq\right)$

טבלת תיקון רציפות

$P(x>a)=P\left(Z \geq \frac{a+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}\right)$	$P(x<a)=P\left(Z \leq \frac{a-\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}\right)$	$P(x=a)=P\left(a-\frac{1}{2}<x<a+\frac{1}{2}\right)$
$P(x \geq a)=P\left(Z \geq \frac{a-\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}\right)$	$P(x \leq a)=P\left(Z \leq \frac{a+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}\right)$	

<u>שאלה 3</u>

משקלו של עלון פרסום הוא משתנה מקרי X המתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 גרם.
מותר לשלוח בדואר חבילת עלונים במשקל מקסימלי של 3 ק"ג. העלונים ב"ת האחד במשנהו.
מהי בקירוב ההסתברות ש-

א. 36 עלוני פרסום שנבחרו באקראי ייכנסו בחבילה אחת?

ב. ממוצע המשקל של 25 עלוני פרסום שנבחרו באקראי יעלה על 110 גרם?

ג. לפחות 9 מתוך 36 עלוני פרסום שנבחרו באקראי ישקלו למעלה מ- 110 גרם? כתוב תחילה ביטוי להסתברות המדוייקת של המאורע ורק אח"כ חשב את הקירוב.

ד. בדיוק 12 מתוך 36 עלוני פרסום שנבחרו באקראי ישקלו למעלה מ- 110 גרם?

<u>פתרון:</u>

מהנתון: $X \sim Exp(\lambda); E(X) = 1/\lambda = 100 \Rightarrow \lambda = 1/100$; X – מ"מ משקל עלון פרסום (בגרמים).

א). לפי משפט הגבול המרכזי $S_{36} = \sum_{i=1}^{36} X_i \sim N\left(36\cdot 100, 36\cdot 100^2\right)$,

לכן- $P\left(S_{36} \le 3000\right) = \Phi\left(\frac{3000-3600}{\sqrt{36\cdot 100^2}}\right) = \Phi(-1) = 0.1587$

ב). לפי משפט הגבול המרכזי $\bar{X}_{25} \sim N\left(100, \frac{100^2}{25}\right)$

לכן- $P\left(\bar{X}_{25} > 110\right) = 1-\Phi\left(\frac{110-100}{\sqrt{400}}\right) = 1-\Phi(0.5) = 1-0.69 = 0.31$

ג). נגדיר מ"מ Y – מס' העלונים ששוקלים יותר מ-110 גרם.

הסיכוי שכל עלון בנפרד ישקול יותר מ-110 גר' הוא $e^{-1.1} (\approx 0.333)$,

זאת מהחישוב: $P(X > 110) = 1-P(X \le 110) = 1-\left[1-e^{-\frac{110}{100}}\right] = e^{-\frac{110}{100}} = e^{-1.1}$.

ההתפלגות של Y היא $Y \sim Bin\left(36, e^{-1.1}\right)$. מכאן שביטוי להסתברות המדוייקת הוא:

$$P(Y \ge 9) = 1-P(Y < 9) = 1-\sum_{k=0}^{8}\binom{36}{k}\left(e^{-1.1}\right)^k\left(e^{-1.1}\right)^{36-k}$$

<u>הקירוב הנורמלי:</u>

מסעיף א' כאמור, Y = מתפלג בינומית. אזי: $E(Y)=36\cdot e^{-1.1}$, $V(Y)=36\cdot e^{-1.1}\left(1-e^{-1.1}\right)$.

נכניס את תיקון הרציפות (חיסור 0.5), ונקבל

$$P(Y\ge 9)=1-P(Y<9)=1-\Phi\left(\frac{9-0.5-36\cdot e^{-1.1}}{\sqrt{36\cdot e^{-1.1}\cdot\left(1-e^{-1.1}\right)}}\right)=1-\Phi(-1.23)=1-0.11=0.89$$

ד). נפעיל את משפט הגבול המרכזי ונשתמש בתיקון רציפות:

$$P(Y=12)\Rightarrow P(11.5\le Y\le 12.5)$$
$$=\Phi\left(\frac{12.5-36\cdot e^{-1.1}}{\sqrt{36\cdot e^{-1.1}\cdot\left(1-e^{-1.1}\right)}}\right)-\Phi\left(\frac{11.5-36\cdot e^{-1.1}}{\sqrt{36\cdot e^{-1.1}\cdot\left(1-e^{-1.1}\right)}}\right)=\Phi(0.183)-\Phi(-0.171)=0.140$$

<u>אי שוויונים הסתברותיים</u>

<u>אי שוויון מרקוב</u>

אם X הוא מ"מ המקבל ערכים אי שליליים בלבד, אז לכל ערך חיובי a מתקיים $P(X\ge a)\le\frac{E(X)}{a}$

<u>אי שוויון צ'בישב</u>

אם X מ"מ שתוחלתו μ ושונותו σ^2 הן סופיות, אז לכל ערך חיובי k מתקיים $P(|X-\mu|\ge k)\le\frac{\sigma^2}{k^2}$

<u>שאלה 4</u>

בבניין יש 80 מדרגות עד לגג. אדם מטיל קובייה הוגנת 20 פעמים, כאשר אחרי הטלה הוא עולה מספר המדרגות השווה לזה שמראה הקובייה. תן חסם מלעיל לסיכוי שיגיע לגג, בעזרת אי-שוויון צ'בישב, אי-שוויון מרקוב, וקירוב להתפלגות הנורמלית.

<u>פתרון:</u>

יהי X מ"מ המייצג תוצאת הטלת קובייה אזי $X \sim U[1,6]$, ולכן תוחלתו ושונותו-

$$E(X)=\frac{1+6}{2}=3\frac{1}{2},\ V(X)=\frac{6^2-1}{12}=2\frac{11}{12}$$

יהי $Y=\sum_{i=1}^{20}X_i$ (סכום של 20 הטלות בלתי-תלויות), אזי מלינאריות התוחלת-

$$E(Y)=3\frac{1}{2}\cdot 20=70,\qquad V(X)=2\frac{11}{12}\cdot 20=58\frac{1}{3}$$

<u>חסם לפי אי-שוויון צ'בישב:</u>

$$P(Y\geq 80)=P(Y-70\geq 10)\leq P(|Y-70|\geq 10)\leq\frac{58.333}{100}=\boxed{0.58333}$$

ניתן לשפר את החסם שקיבלנו בשאלה זו, משום ש- Y מתפלג באופן סימטרי סביב התוחלת שלו.

לפיכך- $P(Y\geq 80)=P(Y-70\geq 10)=\frac{1}{2}P(|Y-70|\geq 10)=\frac{0.58333}{2}=0.2916$.

<u>חסם לפי אי-שוויון מרקוב:</u> $P\left(Y\geq 80\right)\leq\frac{70}{80}\qquad=P\left(Y\geq 80\right)\leq\boxed{0.875}$

<u>חישוב ההסתברות בעזרת משפט הגבול המרכזי:</u>

$$X_i\sim U[1,6]\qquad\Rightarrow E\left(X_i\right)=3.5,\ V\left(X_i\right)=35/12$$

$$Y=\sum_{1}^{20}X_i\sim N\left(20\cdot 3.5,20\cdot 35/12\right)=N\left(70,58.333\right)$$

$$P\left(Y\geq 80\right)=1-P\left(Y<80\right)=1-\Phi\left(\frac{80-70}{\sqrt{58.333}}\right)=1-\Phi\left(1.31\right)=1-0.905=\boxed{0.095}$$