מבני נתונים ואלגוריתמים - תרגול 9

1 בינואר 2012

אלגוריתם למפל זיו

המילון שלנו בהתחלה הוא:

$$\begin{aligned} a &= 00 \\ b &= 01 \\ c &= 10 \\ d &= 11 \end{aligned}$$

באופן כללי:

1. כל מילה חדשה מקודדים כזוג סדור (j, k) כאשר j מס' המילה שקיימת וk האות הנוספת החדשה.
2. הופכים את הזוגות הסדורים למחרוזת בינארית - את המספר j נכתוב כמספרים בינאריים עם $\log_2 i$ אותיות כאשר i הוא המספר הסידורי של המילה ואת האות k לפי המילון.

נקודד את המילה:

$$aabccdaabcdba$$

המילים שלנו יהיו:

i	$\lceil\log_2 i\rceil$	מילה	חלק במחרוזת	קידוד בבינארית (i בבינארית ב$\lceil\log_2 i\rceil$ ספרות ואז הקוד של האות)
1	0	$(0, a)$	a	00
2	1	$(1, b)$	ab	101
3	2	$(0, c)$	c	0010
4	2	$(3, d)$	cd	1111
5	3	$(1, a)$	aa	00100
6	3	$(0, b)$	b	00001
7	3	$(4, b)$	cdb	10001
8	3	(1)	a	001

הקידוד של המחרוזת יהיה:

$$001010010111100100000110001001$$

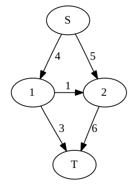
כעת לשחזור. נניח שיש לנו את המחרוזת המקודדת הנ"ל.
ניקח $i = 1$ עד שנגמרת המחרוזת,
$\lceil\log_2 i\rceil$ - המספר הסידורי,
מס' ספרות k ע"פ המחרוזת.
במקרה שלנו $k = 2$.

i	$\lceil\log_2 i\rceil$	מילה במחרוזת המקודדת ($k + \log_2 i$ ספרות)	מילה משוחזרת
1	0	$, 00 = (0, a)$	a
2	1	$1, 01 = (1, b)$	ab
3	2	$00, 10 = (0, c)$	c
4	2	$11, 11 = (3, d)$	cd
5	3	$001, 00 = (1, a)$	aa
6	3	$000, 01 = (0, b)$	b
7	3	$100, 01 = (4, b)$	cdb
8	3	$001, = (1)$	a

המילה המשוחזרת היא:

$$aabccdaabcdba$$

Max Flow - זרימה



נחפש מה הזרימה המקסימלית שאפשר להעביר מקדקד s לקדקד t.
באופן כללי - נמצא מסלול זרימה מסוים, וכל פעם נחפש מסלול משפר.
סימונים:
$c(u, v)$ - קיבולת לקשת.
$f(u, v)$ - זרימה כרגע בקשת.
G_f - גרף שיורי, גרף שהקיבולות בו הן כמה אפשר להעיבר עוד, לא כולל הזרימה הנוכחית.

אלגוריתם

נאתחל את הגרף באופן הבא:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(v, u) = 0 \\ G_f &= G \end{aligned}$$

כל עוד יש מסלול מS לT בגרף G_f:
נמצא מסלול p בגרף G_f ונחשב את קיבולו השיורי $c_f(p)$.
נגדיל את הזרימה בG לאורך p ב$c_f(p)$:
לכל צלע (u, v) במסלול נעדכן:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(u, v) + c_f(p) \\ f(v, u) &= -f(u, v) \end{aligned}$$

ונעדכן את הגרף השיורי לאורך המסלול p: לכל צלע (u, v) במסלול נעדכן

$$\begin{aligned} c_f(u, v) &= c(u, v) - f(u, v) \\ c_f(v, u) &= c(v, u) - f(v, u) \end{aligned}$$

חתכים

חתך (S, T) ברשת הוא חלוקה של V (הגרף) לשתי קבוצות זרות S, T כך ש$s \in S$ ו$t \in T$.
קיבול חתך = סכום הקיבולים בקשתות שנחצות על ידי החתך:

$$c(S, T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c(u, v)$$

זרימה בחתך = סכום הזרימות בקשתות הנחצות ע"י החתך:

$$f(S, T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(u, v)$$

משפט Min Cut, Max Flow

תהי f זרימה ברשת G. התנאים הבאים שקולים:

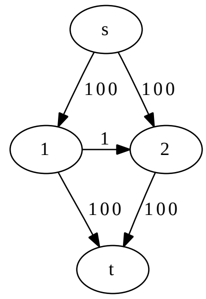
1. f זרימה מרבית בG.
2. בגרף השיורי G_f אין מסלול מs לt.
3. קיים חתך (S, T) עבורו $|f| = C(S, T)$.

שאלה

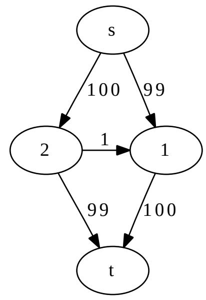
נתונה רשת זרימה כלשהי. מנסים למצוא זרימה מרבית בעזרת שיטת Ford-Fulkerson. ניזכר שהרשת השיורית משתנה בכל איטרציה.
הוכח או הפרך את הטענה הבאה:
אם באיטרציה i נעלמת הקשת e מגרף הרשת השיורית אז e לא תופיע בגרפי הרשתות השיוריות באי-טרציות לאחר i.

פתרון

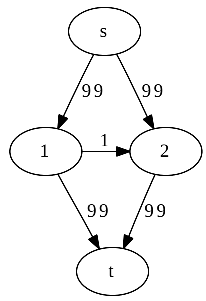
נפריך עם הגרף:



ניקח את המסלול $S \to 1 \to 2 \to t$ שקיבולו 1 והגרף השיורי יהיה:



הקשת $1 \to 2$ נעלמה.
כעת נשתמש במסלול $S \to 2 \to 1 \to t$ שקיבולו 1 ונקבל שהקשת $1 \to 2$ חזרה:



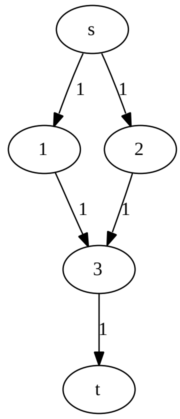
שאלה

נתונה רשת זרימה שלמה. (כלומר כל קשת בעלת קיבולת שלמה).

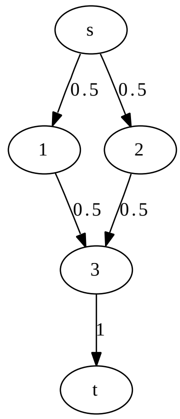
1. האם כל זרימה מרבית היא בהכרח שלמה? הוכח או הפרך.
2. הראה ששיטת Ford Fulkerson פועלת במספר סופי של איטרציות במקרה של רשת זרימה שלמה.
3. האם בהכרח קיימת זרימה מרבית שהיא שלמה? הוכח או הפרך.

פתרון

1. ניקח את הרשת:



ויש רשת זרימה מרבית לא שלמה:



2. בכל איטרציה נשפר את הזרימה המרבית לפחות ב1.
נניח שהזרימה המרבית היא $|f|$, אז מס' האיטרציות המקסימלי יהיה $\leq |f|$.

3. ע"פ סעיף 2, האלגוריתם משפר זרימה בקשת במס' שלם (בקיבולת השיורית המינימלית של קשת על המסלול), והגרף הסופי יכלול זרימה שלמה בכל קשת.