# אלגברה מופשטת - תרגיל 4

**<u>שאלה 1</u>**

נתונה התמורה הבאה בחבורה $S_9$: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&8&9&6&2&1&7&5&3\end{pmatrix}$.

א. רשמו את $\sigma$ כמכפלת מחזורים זרים.
ב. מצאו את הסדר של $\sigma$.
ג. האם $\sigma\in A_9$? הסבירו.
ד. מהו הסדר של $\sigma^{14}$?
ה. מצאו את $\sigma^{-1}$ וכתבו אותה כמכפלת מחזורים זרים.

**<u>פתרון</u>**

א. האלגוריתם הוא די פשוט: מתחילים ב-1 ורואים לאן הוא נשלח, ולאן התמונה שלו נשלחת וממשיכים עד שחוזרים ל-1. כך נקבל את המחזור $(146)$. כעת כדי לקבל מחזורים זרים מחפשים את המספר הקטן ביותר שלא נמצא במחזורים שכבר ראינו, וזה יהיה $2$. כך נקבל את המחזור $(285)$. ממשיכים עד בדיקת $n=9$.
לבסוף נקבל כי $\sigma=(146)(285)(39)$.
ב. הסדר הוא $\operatorname{lcm}(3,3,2)=6$.
ג. יש לבדוק האם $\sigma$ זוגית: $\operatorname{sign}(\sigma)=1\cdot 1\cdot -1=-1$ ולכן אינה זוגית, כלומר $\sigma\notin A_9$.
ד. לפי סעיף ב' אנחנו יודעים כי $|\langle\sigma\rangle|=6$. לכן לפי טענה מהשיעור $o(\sigma^{14})=\frac{6}{(14,6)}=3$.
אפשר גם להשתמש בחישוב יותר ישיר: $\sigma^{14}=\sigma^{12}\cdot\sigma^2=\left(\sigma^6\right)^2\cdot\sigma^2=\sigma^2=(164)(258)$
ולכן הסדר הוא 3.
ה. $\sigma^{-1}=(146)^{-1}(285)^{-1}(39)^{-1}=(164)(258)(39)$.

**<u>שאלה 2</u>**

הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות. עבור הטענות הנכונות מצאו גרעין.

א. קיים אפימורפיזם מהחבורה $S_{14}$ לחבורה מסדר 34.
ב. קיים אפימורפיזם $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{60}$.
ג. קיים אפימורפיזם $\varphi:\mathbb{Z}_{60}\to\mathbb{Z}_{12}$.
ד. קיים איזומורפיזם $\varphi:D_6\to\Omega_{12}$.

ה. קיים מונומורפיזם $\varphi: A_4 \to S_5$.

ו. קיים מונומורפיזם $\varphi: \mathbb{Z}_{24} \to S_4$.

**<u>פתרון</u>**

א. לא קיים אפימורפיזם. לו היה קיים אפימורפיזם $\varphi$ כזה, אז $|S_{14}/\ker\varphi| = 34$. אבל $34 = 2\cdot 17$ אינו מחלק את סדר החבורה $|S_{14}| = 14!$, כי $17$ הוא ראשוני גדול מ-14.

ב. קיים אפימורפיזם לפי $\varphi(x) = x(\bmod 60)$. הגרעין הוא $60\mathbb{Z}$.

ג. קיים אפימורפיזם לפי $\varphi(x) = x(\bmod 12)$. הגרעין הוא $12\mathbb{Z}_{60} = \{0,12,24,36,48\}$.

ד. לא קיים איזומורפיזם כי $D_6$ לא אבלית ואילו $\Omega_{12}$ אבלית.

ה. קיים מונומורפיזם "טבעי" ששולח תמורה לעצמה. במונומורפיזם הגרעין הוא טריוויאלי.

ו. לא קיים מונומורפיזם כי סדר החבורות שווה, ולכן מונומורפיזם יהיה איזומורפיזם, אך $\mathbb{Z}_{24}$ אבלית ואילו $S_4$ לא אבלית.

**<u>שאלה 3</u>**

א. האם החבורה $U_{14}$ איזומורפית לחבורה $U_{18}$?

ב. האם מספר <u>האפימורפיזמים</u> $\mathbb{Z} \to \Omega_4 \times \Omega_5$ גדול ממספר <u>האוטומורפיזמים</u> של $\mathbb{Z}_{20}$?

**<u>פתרון</u>**

א. ידוע לנו כי $|U_n| = \varphi(n)$, לכן $|U_{14}| = \varphi(14) = 6 = \varphi(18) = |U_{18}|$. כמו כן $U_n$ היא אבלית ובמיון חבורות מסדר 6 ראינו כי יש רק חבורה אבלית אחת עד כדי איזומורפיזם $\mathbb{Z}_6$.
דרך אחרת: בחישוב ישיר אפשר לראות כי $U_{14}, U_{18}$ הן ציקליות (לא נכון לכל $U_n$!) ויש רק חבורה ציקלית אחת מסדר 6 ולכן הן חבורות איזומורפיות.

ב. ראינו כי $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{20})| = \varphi(20) = \varphi(4)\varphi(5) = 2\cdot 4 = 8$. נשים לב כי $\Omega_4 \times \Omega_5 \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{20}$. אפימורפיזם שולח יוצר ליוצר. החבורה $\mathbb{Z}_{20}$ היא ציקלית, כלומר נוצרת על ידי איבר אחד ולכן האפימורפיזם $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{20}$ נקבע לחלוטין על פי התמונה $f(1)$. ישנם $\varphi(20) = 8$ יוצרים לחבורה $\mathbb{Z}_{20}$ ולכן מספר האפימורפיזמים $\mathbb{Z} \to \Omega_4 \times \Omega_5$ שווה למספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_{20}$.

**<u>שאלה 4</u>**

בסעיפים הבאים תנו דוגמה שמפריכה את <u>הטענות השגויות</u> הבאות:

א. כל חבורה מסדר 16 היא אבלית.

ב.  תהינה $A,B \triangleleft G$ . אם $G/A \cong B$, אז $G/B \cong A$.

ג.  תהינה $A,B \triangleleft G$ . $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A \cong B$ .

**<u>פתרון</u>**

א.  נבחר את $D_8$ שהיא מסדר 16 וראינו כי $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

ב.  נבחר $G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$ . נבחר $A=\mathbb{Z}_4\times\{0\}, B=\{(0,0),(2,0)\}\times\{0\}$ . אכן $G/A=\{0\}\times\mathbb{Z}_2 \cong B$, אבל $G/B \cong \{(0,0),(2,0)\}\times\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \ncong A$.
דוגמה אחרת היא למשל $G=\mathbb{C}^*$. נגדיר הומומורפיזם $f:\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ לפי $f(x)=x^2$ . נבחר $A=\ker f=\{1,-1\}$ . ההעתקה $f$ היא אפימורפיזם (בדקו!) ולכן $G/A \cong \mathbb{C}^*$, כך נוכל לבחור $B=\mathbb{C}^*$ . אבל $G/B \cong \{1\}$ היא החבורה הטריוויאלית שאינה איזומורפית ל-$A$ .

ג.  נבחר $G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$ . אם $A=\mathbb{Z}_4\times\{0\}, B=\{(0,0),(2,0)\}\times\mathbb{Z}_2$ , אז נקבל כי $G/A \cong \{0\}\times\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \cong \{(0,0),(2,0)\}\times\{0\} \cong G/B$. אבל $A$ ציקלית ואילו $B$ לא ציקלית ולכן $A \ncong B$ .

**<u>שאלה 5</u>**

מצאו את $Z(S_3)$ . האם אתם יכולים למצוא את המרכז של $S_3$ ללא חישוב ישיר, אלא בעזרת טענות מהתירגול, בהסתמך על כך שהחבורה $S_3$ אינה אבלית?

**<u>פתרון</u>**

החבורה $S_3$ אינה אבלית, ולכן $|Z(S_3)| \neq |S_3|$. אנו יודעים כי המרכז הוא תת־חבורה ולכן הסדר שלו מחלק את סדר החבורה. אפשר לשים לב כי אם $|Z(S_3)|=2$, אז $|S_3/Z(S_3)|=3$. אבל יש חבורה אחת עד כדי איזומורפיזם מסדר 3 והיא ציקלית. לפי טענה מן התירגול נקבל בסתירה כי $S_3$ אבלית. עם אותה טענה מראים כי $|Z(S_3)| \neq 3$. לכן, נקבל כי המרכז של $S_3$ הוא טריוויאלי.

**<u>שאלה 6</u>**

נסתכל בתת־חבורה נורמלית של המספרים הרציונליים $(\mathbb{Z},+) \triangleleft (\mathbb{Q},+)$.

א.  הוכיחו כי בחבורת המנה $G=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הסדר של כל איבר הוא סופי.

ב. הוכיחו כי תת־החבורה של $G$ שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{1}{10}$ ו- $\frac{3}{8}$ היא ציקלית.

כלומר יש להוכיח $\left\langle \frac{1}{10}+\mathbb{Z}, \frac{3}{8}+\mathbb{Z} \right\rangle = \langle a+\mathbb{Z} \rangle$ עבור $a \in \mathbb{Q}$ כלשהו.

ג. מהו הסדר של תת־החבורה מהסעיף הקודם? מהו האינדקס שלה ב- $G$?

**<u>פתרון</u>**

א. איבר היחידה בחבורה $G$ הוא המחלקה $0+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$. לכן יש למצוא לכל $x \in G$ איזשהו $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \cdot x = \mathbb{Z}$ (החבורה היא חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב- $n$).

כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x=\frac{a}{b}+\mathbb{Z}$ עבור $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}$. מכאן רואים כי $b\left(\frac{a}{b}+\mathbb{Z}\right)=a+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ ולכן $x$ הוא לכל היותר מסדר $b$.

ב. יש להראות כי $\left\langle \frac{1}{10}+\mathbb{Z}, \frac{3}{8}+\mathbb{Z} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{40}+\mathbb{Z} \right\rangle$ (אפשר להראות שיש גם יוצרים אחרים).

ההוכחה היא לפי הכלה דו־כיוונית של היוצרים: רואים כי $4\cdot\frac{1}{40}=\frac{1}{10}$ וגם $15\cdot\frac{1}{40}=\frac{3}{8}$

בכיוון אחד. בכיוון השני $\frac{1}{40}=4\cdot\frac{1}{10}-1\cdot\frac{3}{8}$.

ג. סדר תת־החבורה הוא 40 והאינדקס שלה הוא אינסופי. אפשר לראות כי לכל שני ראשוניים $p_1 \neq p_2$ שונים שאינם 2 או 5 יתקיים כי $\frac{1}{p_1}+\left\langle \frac{1}{40}+\mathbb{Z} \right\rangle \neq \frac{1}{p_2}+\left\langle \frac{1}{40}+\mathbb{Z} \right\rangle$ ולכן ישנן אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

**<u>שאלה 7</u>**

א. תהי $H \le G$. הראו $H \cap Z(G) \subseteq Z(H)$ ותנו דוגמה שבה ההכלה אמיתית.

ב. תהי $N \lhd G$. הראו $Z(N) \lhd G$.

בסעיפים הבאים תנו דוגמה לחבורה $G$ ולתת־חבורה $H \le G$ שמקיימות:

ג. הכלה ממש $Z(H) \subset Z(G)$.

ד. הכלה ממש $Z(G) \subset Z(H)$.

ה. $Z(G)$ לא מכיל את $Z(H)$ ולא מוכל בו.

**פתרון**

א. יהי $x\in H\cap Z(G)$, לכן $x\in H$. יש להראות כי לכל $h\in H$ מתקיים $xh=hx$. אבל נתון כי $x\in Z(G)$ ולכן מתחלף עם כל איברי $G$, ובפרט עם כל איברי $H$.

דוגמה בה יש הכלה אמיתית: נבחר $G=D_4, H=\langle\sigma\rangle$. תת־החבורה $H$ היא ציקלית, לכן אבלית, ולכן $Z(H)=H$ מסדר 4. המרכז של $G$ הוא לא כל החבורה (כי היא לא אבלית), הוא לא מסדר 4 כי אחרת $G/Z(G)$ ציקלית ולפי טענה מן השיעור נקבל כי $G$ אבלית. בדיקה ישירה מראה כי $\sigma^2\in Z(G)$ (גיאומטרית זהו סיבוב ב-180 מעלות של ריבוע) ולכן נקבל שהמרכז $Z(G)=\langle\sigma^2\rangle$ ושהוא מסדר 2. מכאן שמתקיימת הכלה אמיתית $H\cap Z(G)\subsetneq Z(H)$.

דוגמה יותר "משעממת" היא $G=S_3, H=A_3$. לפי שאלה 5 ידוע לנו כי $Z(G)$ טריוויאלי. כמו כן מספר התמורות הזוגיות הוא $|A_n|=\frac{n!}{2}$. במקרה זה $|H|=3$ ולכן $H$ היא אבלית משיקולי סדר, כלומר $Z(H)=H$.

ב. יש להראות כי לכל $g\in G$ מתקיים $gZ(N)g^{-1}\subseteq Z(N)$. יהא $x\in gZ(N)g^{-1}$ ולכן קיים $n\in Z(N)$ כך ש-$x=gng^{-1}$. הנחנו $n\in Z(N)\subseteq N$ וגם $N\lhd G$ ולכן $x\in N$. נותר להראות כי לכל $t\in N$ מתקיים $xt=tx$. בהצבת $x$ יש להראות $gng^{-1}t=tgng^{-1}$, כלומר להראות $ng^{-1}tg=gtg^{-1}n$. לפי הנורמליות $gtg^{-1},g^{-1}tg\in N$ וגם $n\in Z(N)$ ולכן הוכחנו את הדרוש.

ג. נבחר $G=\mathbb{Z}, H=2\mathbb{Z}$.

ד. הדוגמאות מסעיף א'.

ה. נבחר $G=D_4, \mathrm{H}=\langle\tau\rangle$.

## בהצלחה!