

גיאומטריה אקסיומטית- תרגיל 1
להגשה בתאריך 29.11.16

הוכיחו את המשפט הבא:

משפט B.1 לכל שתי נקודות שונות $A \neq B$:

$$AB = \overline{AB} \cap \overline{BA} \quad (i)$$

$$\overline{AB} = \overline{AB} \cup \overline{BA} \quad (ii)$$

הוכחה

הוכחנו את (i) בכיתה.

הוכחה של (ii)

כיון \Leftarrow :

לא הגדרנו ישר כי זה ביטוי בלתי מוגדר. סעיף זה מדבר על הישר כאוסף כל הנקודות שעליו. כלומר באמצעות אקסיומות הסדר אנחנו יכולים לתאר את אוסף כל הנקודות באופן הבא:

$$\{C \mid A * C * B, C * A * B, A * B * C\}$$

ונקודות A, B וכל הנקודות C .
 ולכן לפי ההגדרה של קרן, שהיא חלק מהישר, $\overline{AB} \subseteq \overline{BA}$ ו- $\overline{BA} \subseteq \overline{AB}$, לכן מקבלים מיד כי $\overline{AB} \cup \overline{BA} \subseteq \overline{AB}$.

כיון \Rightarrow : ניקח איבר $C \in \overline{AB}$. אם $C = A$ או $C = B$, סימנו, מכיוון שלפי הגדרה, קרן מכילה את נקודת ההתחלה שלה.

$$\overline{AB} = AB \cup \{C \mid A * B * C\}$$

נניח כי $C \neq A, C \neq B$. לפי אקסיומה 3-B, מתקיים רק אחד מהיחסים הבאים:
 $C * A * B$ או $A * C * B, A * B * C$

אם $A * C * B$, אז לפי הגדרת הקרן $C \in \overline{AB}$ לכן $C \in \overline{AB} \cup \overline{BA}$ (מספיק אחד מהם כי זה איחוד)
 אם $A * B * C$, אז לפי הגדרת הקרן $C \in \overline{AB}$, לכן $C \in \overline{AB} \cup \overline{BA}$.
 אם $C * A * B$, אז לפי הגדרת הקרן $C \in \overline{BA}$, לכן $C \in \overline{AB} \cup \overline{BA}$.
 בכל המקרים מקבלים כי $C \in \overline{AB} \cup \overline{BA}$ והוכחנו $\overline{AB} \cup \overline{BA} \supseteq \overline{AB}$.
 בסה"כ הוכחנו את השוויון הדרוש $\overline{AB} = \overline{AB} \cup \overline{BA}$.

תרגיל 2

נתונות נקודות A, B, C שאינן קולינאריות. הוכיחו כי $\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{B\}$.

הוכחה

לפי הנתון, הנקודות הנתונות אינן על ישר אחד, לכן הן שונות והקרנים בשאלה מוגדרות היטב. נוכיח שתי הכלות:

כיון ראשון: \Leftarrow עלינו להוכיח כי בנקודה B נמצאת בחיתוך $\overline{AB} \cap \overline{BC}$.

לפי ההגדרה, ניתן לכתוב את הישר \overline{AB} כך:

$$\overline{AB} = AB \cup \{D \mid D * A * B\} \cup \{D \mid A * B * D\}$$

לכן הנקודה B נמצאת על הישר \overline{AB} כי היא על קטע.

באותו אופן:

$$\overline{BC} = BC \cup \{E \mid E * B * C\} \cup \{E \mid B * C * E\}$$

לכן הנקודה B נמצאת על הישר \overline{BC} .

כיון שני \Rightarrow עלינו להראות כי $\overline{AB} \cap \overline{BC} \subseteq \{B\}$.

ניקח $X \in \overline{AB} \cap \overline{BC}$, אז $X \in \overline{AB}$ וגם $X \in \overline{BC}$.

מכיוון ש- $X \in \overline{AB}$, קים איזשהו ישר ℓ כך שהנקודות A, B, X הן על ℓ .

ומכיוון ש- $X \in \overline{BC}$, קים איזשהו ישר m כך שהנקודות B, C, X הן על m .

נניח בשלילה ש- $X \neq B$ אז אלה שתי נקודות שונות הנמצאות שתיהן על הישרים ℓ ו- m בו זמנית, לכן לפי משפט 1.1 נקבל $\ell = m$. זו סתירה לכך שהנקודות A, B, C אינן קוליניאריות.

בסה"כ $X = B$, כלומר $\overline{AB} \cap \overline{BC} \subseteq \{B\}$.

תרגיל 3

נתונות נק' P, Q כך ש P על ℓ ו Q לא על ℓ . הוכיחו כי הקרן \overrightarrow{PQ} הפתוחה, כלומר הקרן בלי הנקודה P , אינה חותכת את הישר ℓ .
הוכחה

נתון ישר ℓ ונקודה P על ℓ ו Q לא על ℓ .

לפי אקסיומה $I-1$ קים ישר אחד ויחיד בין P ו- Q , \overline{PQ} .

כעת, הקרן \overline{PQ} לפי ההגדרה:

$$\overline{PQ} = PQ \cup \{C | P * Q * C\}$$

ולכן הקרן ללא הנקודה P (קרן פתוחה):

$$\{Q\} \cup \{C | P * C * Q\} \cup \{D | P * Q * D\}$$

מכאן נובע כי הקרן הפתוחה לא מכילה נקודות על ℓ כי P לא נמצאת שם.

P נקודת החיתוך היחידה בין שני הישרים ℓ ל \overline{PQ} (אין עוד נקודות לפי משפט 1.1).

$\overline{PQ} \subseteq \overline{PQ}$ (הוכחנו בתרגול 1) ואם מורידים את P אז אין נקודות חיתוך של הקרן הפתוחה עם הישר ℓ , כלומר אינה חותכת את הישר.

תרגיל 4

נתונים הישרים m, ℓ . ונתונה נק' כך ש- $\{O\} = \ell \cap m$ (נק' החיתוך היחידה ביניהם). הוכיחו כי

קימות נקודות P, Q על ℓ , שהן בצדדים שונים של הישר m .

הוכחה

לפי אקסיומה $I-2$, יש נקודה חוץ מ O שנמצאת על ℓ . נקרא לה P .

לפי אקסיומה $B-2$ יש שתי נקודות שונות P ו- O אז קימת נקודה Q על הישר ℓ כך ש- $P * O * Q$.

(רוצים בכוונה נקודה אחרי O). לפי הגדרה של צד, הקטע PQ מכיל נקודה על m שהיא O , כי יש את

היחס $P * O * Q$ ולכן P ו- Q בצדדים שונים של m .

תרגיל 5

הוכיחו את המשפט הבא:

משפט B.3: אם נתונים $A * B * C$ ו $A * C * D$, אז $B * C * D$ ו $A * B * D$.

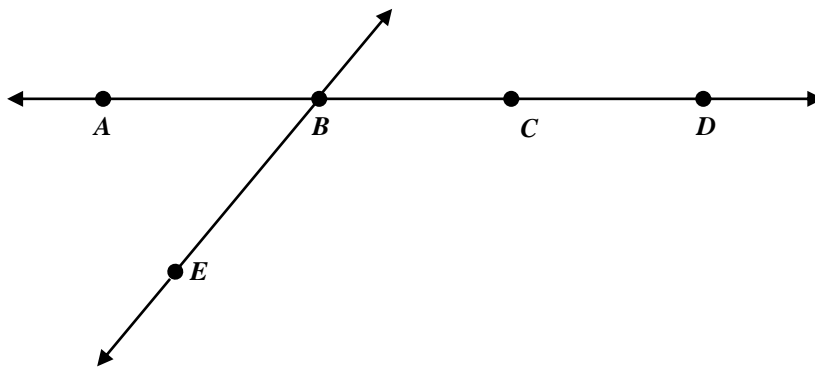
הוכחה

הוכחנו את $B * C * D$ בכיתה.

∴ $A * B * D$

(1) A, B, C, D נקודות שונות קולינאריות- נמצאות על ישר אחד.

(2) קימת נקודה E לא על הישר \overline{ABCD} לפי משפט I-2.



(3) נתבונן בישר \overline{EB} (הוא קיים לפי אקסיומה I-1). מפני ש \overline{AD} נפגש עם \overline{EB} בנקודה B , אז הקטע AD מכיל נקודה (B) של הישר \overline{EB} , לכן לפי הגדרת הצד הנקודות A ו D בשני צדדים שונים של ישר \overline{EB} .

(4) לפי ההנחה נתונים $A * B * C$ ו $A * C * D$ אנחנו טוענים שהנקודות C ו D באותו צד של ישר \overline{EB} . נניח בשלילה שהם בשני צדדים שונים של \overline{EB} .

(5) אז \overline{EB} נפגש עם \overline{CD} בנקודה בין C ו D (הגדרה של צדדים שונים).

(6) הנקודה הזו חייבת להיות B לפי משפט I.1 היא הנקודה המשותפת היחידה בין שני ישרים שונים (כי הנקודה E לא נמצאת עליו ולכן שונים ולפי נתון 3) כלומר מתקים $C * B * D$

(7) לכן מתקים $A * C * B$ (כי B בין C ל D) וזה בסתירה לכך שמתקים $A * B * C$, שסותר אקסיומה B-3 שצריכה להתקים רק אחת מהאפשרויות.

ניתן לסתור גם לפי ההוכחה שאנו יודעים כי מתקים $B * C * D$ הוכחנו בכיתה ואז זה בסתירה ל 5 ולאקסיומה B-3.

(8) לפיכך, C ו D באותו צד של \overline{EB}

(9) לפיכך, $B \in \overline{EB} \cap \overline{AD}$ אכן הנקודה המשותפת היחידה ולפי הנתונים $A * B * C$ ו $A * C * D$ מקבלים גם $A * B * D$.