לינארית 1 בוחן קיץ 2019

מרצים: אלעד אטיא, אחיה בר-און, אליהו מצרי, ארז שיינר.
מתרגלים: רועי אבל, ניקול בלשוב, עדי בן צבי, תמר בר-און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, פולינה לוצקר, אושרית שטוסל.

חובה לענות על השאלה בחלק 1.
יש לבחור שאלה אחת בדיוק מבין השאלות של חלק 2.
משקל כל סעיף 20 נקודות.
בהצלחה!

חלק 1 - ענו על השאלה הבאה:

1. הוכיחו/ הפריכו את הטענות הבאות:

(א) תהי A מטריצה ריבועית שמקיימת: $A^4 + A^3 + A$ הפיכה. אזי A^3 הפיכה.

(ב) תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ וקטור $b \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון. אזי גם למערכת $Ax = 2b$ אין פתרון.

(ג) תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה, כך שU היא הצורה הקנונית שלה. אזי $m-1$ השורות הראשונות של U היא הצורה הקנונית של $m-1$ השורות הראשונות של A.

פתרון

(א) הוכחה: $A^4 + A^3 + A = A(A^3 + A^2 + I)$. כפל של מטריצות ריבועיות הוא הפיך אמ"ם כל אחת מהן הפיכה. לכן A הפיכה, ומכאן שA^3 הפיכה.

(ב) הוכחה: נניח שלמערכת $Ax = 2b$ יש פתרון. יהי vהפתרון. אזי $0.5v$ הוא פתרון למערכת $Ax = b$. אכן, $A(0.5v) = 0.5Av = 0.5 \cdot 2b = b$. [הערה: בשדות של הקורס שלנו אנחנו מניחים כי 2 הפיך ו 0.5 הוא ההופכי של 2].

(ג) הפרכה: נקח את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. הצורה הקנונית שלה היא $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. אבל השורה הראשונה של A היא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ והיא גם הצורה הקנונית של עצמה.

חלק 2 - ענו על שאלה אחת מתוך השתיים הבאות:

1. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. נגדיר $W = \{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid BA = AB\}$.

(א) הוכיחו שW הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$

(ב) מצאו מטריצות $C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש: $W = \{tC + sD \mid t, s \in \mathbb{R}\}$.

פתרון:

(א) איבר 0: $0\cdot A=0=A\cdot 0$, לכן $0\in W$.
יהיו $B,C\in W,\alpha\in\mathbb{F}$. לכן $BA=BA$ וגם $CA=AC$ ולכן

$$(B+\alpha C)A=BA+\alpha CA=AB+\alpha AC=AB+A(\alpha C)=A(B+\alpha C)$$

ומכאן ש $B+\alpha C\in W$.

(ב) לצורך פתירת השאלה נמצא איבר כללי ב W. כלומר, נמצא מתי מטריצה $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ שייכת ל W, במילים אחרות מתי כפל ב A משמאל שווה לכפל ב A מימין. נחשב כפל A משמאל יתן

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 3x+4z & 3y+4w \end{pmatrix}$$

ואילו כפל ב A מימין יתן

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3w & 2z+4w \end{pmatrix}$$

מהשוואת שתי המטריצות נקבל את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} x+2z & =x+3y \\ y+2w & =2x+4y \\ 3x+4z & =z+3w \\ 3y+4w & =2z+4w \end{cases}$$

נעביר אגפים ונקבל

$$\begin{cases} -3y+2z & =0 \\ -2x-3y+2w & =0 \\ 3x+3z-3w & =0 \\ 3y-2z & =0 \end{cases}$$

נדרג את הייצוג המטריצי של המערכת

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4+R_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+\frac{2}{3}R_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[R_1\leftarrow\frac{1}{3}R_1]{R_2\leftarrow-\frac{1}{3}R_2}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

לכן קבוצת הפתרונות (המתשנה השלישי והרביעי חופשיים) היא

$$\left\{\left(\begin{array}{c} -s+t \\ \frac{2}{3}s \\ s \\ t \end{array}\right) \mid s,t\in\mathbb{F}\right\} = \left\{ s\left(\begin{array}{c} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) + t\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right) \mid s,t\in\mathbb{F}\right\}$$

ולכן

$$W = \left\{ s\left(\begin{array}{cc} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{array}\right) + t\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right) \mid s,t\in\mathbb{F}\right\}$$

2. קבעו לאילו ערכי $k\in\mathbb{R}$ למשוואות הבאות יש פתרון יחיד/ אין פתרון/ יש אינסוף פתרונות :

(א)

$$\left(\begin{array}{cc} k & k \\ -1 & -k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ k \end{array}\right)$$

(ב)

$$\left(\begin{array}{cc} k & k \\ -1 & -k \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} x & y \\ z & w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ k & k \end{array}\right)$$

פתרון :

(א) נדרג את המטריצה ואת וקטור התוצאה במקביל.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -k & k \\ k & k & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftarrow -R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -k \\ k & k & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-kR_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -k \\ 0 & k-k^2 & k^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -k \\ 0 & k(1-k) & k^2 \end{array}\right)$$

אם $k\neq 0,1$ אזי נקבל מטריצה מדורגת ללא משתנים חופשים וללא שורת סתירה ובמקרה זה יהיה פתרון יחיד.

עבור $k=0$ נקבל את המערכת $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ שיש לה אינסוף פתרונות

עבור $k=1$ נקבל את המערכת $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ שיש בה שורת סתירה ולכן אין פתרון.

(ב) מכפל עמודה, נקבל שתי מערכות משוואות (שיוויון של העמודה הראשונה בשני האגפים ושיוויון של העמודה השניה בשני האגפים) : מערכת משוואות אחת $\left(\begin{array}{cc} k & k \\ -1 & -k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ k \end{array}\right)$ ומערכת משוואות שניה $\left(\begin{array}{cc} k & k \\ -1 & -k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} y \\ w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ k \end{array}\right)$. כיוון שמדובר באותה מערכת (פעם עם משתנים x,z ופעם עם משתנים y,w), נקבל שקבוצת

הפתרונות של שתי המערכות שווה. בפרט, לשיוויון המקורי יהיה פתרון/יחיד/אין פתרון/אינסוף פתרונות אמ"מ למערכת $\begin{pmatrix} k & k \\ -1 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ יהיה פתרון/יחיד/אין פתרון/אינסוף פתרונות (בהתאמה). זוהי המערכת של סעיף קודם ולכן התשובה זהה - עבור $k \neq 0, 1$ יהיה פתרון יחיד, עבור $k = 0$ אינסוף פתרונות ועבור $k = 1$ לא יהיה פתרון.